Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 8
Abgabe: 16.06.2015, Besprechung: 17.06.2015

---

1. Halbunendliches Potential (4 Punkte, mündlich)

Betrachte das halbunendliche Potential in einer Dimension

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 \le x \le a \\ 0 & a < x \end{cases} \tag{1}$$

(a) (3 Punkte) Bestimme die notwendigen Bedingungen für das Auftreten von gebundenen Zuständen in diesem Potential. Wie viele gebundene Zustände gibt es für $V_0 > 0$?

(b) (1 Punkt) Welcher Grundzustand besitzt eine niedrigere Energie, der für einen endlichen Potentialtopf mit $V(x) = -V_0\theta(a - |x|)$ oder der für ein halbunendliches Potential?

2. Eigenschaften des Drehimpulsoperators (6 Punkte, schriftlich)

Der Vektoroperator $\hat{\mathbf{J}}$ mit $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ definiert einen Drehimpulsoperator definiert, wenn die folgenden Vertauschungsrelation erfüllt sind:

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_z, \quad \left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_x, \quad \text{und} \quad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_y \tag{2}$$

Neben den einzelnen Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{J}_{x/y/z}$ werden häufig auch die folgenden Operatoren benötigt:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \quad \hat{J}_+ = \hat{J}_x + \mathrm{i}\hat{J}_y, \quad \text{und} \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - \mathrm{i}\hat{J}_y. \tag{3}$$

Verwenden Sie die genannten Relationen bzw. Definitionen um die nachfolgenden Zusammenhänge zu zeigen:

(a) (2 Punkte)

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_+\right] = \hbar\hat{J}_+, \quad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_-\right] = -\hbar\hat{J}_- \quad \text{und} \quad \left[\hat{J}_+, \hat{J}_-\right] = 2\hbar\hat{J}_z. \tag{4}$$

(b) (2 Punkte)

$$\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_+\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_-\right] = 0. \tag{5}$$

(c) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} \hat{J}_+\hat{J}_- &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z \\ \hat{J}_-\hat{J}_+ &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z \\ \hat{\mathbf{J}}^2 &= \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+\right) + \hat{J}_z^2 \end{aligned} \tag{6}$$

3. Bahndrehimpuls (6 Punkte, schriftlich)

Der Bahndrehimpuls-Operator ist durch $\hat{\mathbf{L}} = \left(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\right) = \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{P}}$ gegeben.
In Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ist der Gradient gegeben durch

$$\nabla_{r,\theta,\phi} = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{7}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned} \tag{8}$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten die Form hat:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\Big(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \quad \text{und} \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{9}$$

(b) (2 Punkte) Der Zustand eines Teilchens sei nun durch die Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = (x+y+2z)Ne^{-r^2/\alpha^2} \tag{10}$$

mit $N, \alpha \in \mathbb{R}$ beschrieben. Es gilt

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big), \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass $\psi(\mathbf{r})$ eine Eigenfunktion von $\hat{\mathbf{L}}^2$ ist, also

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi(\mathbf{r}) = l(l+1)\hbar^2\psi(\mathbf{r}), \tag{12}$$

und bestimmen Sie den Wert von l.

(c) (2 Punkte) Drücken Sie nun die Wellenfunktion (10) durch eine Superposition geeigneter Kugelflächenfunktionen aus. Welche Werte können für die z-Komponente $\hat{L}_z$ des Bahndrehimpuls gemessen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese gemessen?

4. Bahndrehimpulserwartungswerte (3 Punkte, mündlich)

(a) (2 Punkte) Betrachte ein Teilchen mit Bahndrehimpuls (z-Komponente $\hbar m$ und Quadratamplitude $\hbar^2 l\,(l+1)$). Zeige, dass in diesem Zustand gilt

$$\langle\hat{L}_x\rangle = \langle\hat{L}_y\rangle = 0. \tag{13}$$

und

$$\langle\hat{L}_x^2\rangle = \langle\hat{L}_y^2\rangle = \frac{\hbar^2 l\,(l+1) - m^2\hbar^2}{2}. \tag{14}$$

(b) (1 Punkt) Was ist der Erwartungswert des Operators

$$\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x \tag{15}$$

im Zustand, der beschrieben wird durch $Y_{lm}\,(\theta,\varphi)$?