Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 8 (Lösungen)
Abgabe: 16.06.2015, Besprechung: 17.06.2015

---

1. Halbunendliches Potential (4 Punkte, mündlich)

(a) Diesen Potential ist für $x > 0$ identisch zum endlichen Potentialtopf, welches in der Vorlesung diskutiert wurde. Wegen des unendlichen Potentials für $x < 0$ sind nur die ungeraden Lösungen des endlichen Potentialtopfes erlaubt (weil sonst $\psi(0) \neq 0$ wäre). Das Auftreten von gebundenen Zuständen ist dann durch die Bedingung (siehe Vorlesung)

$$\eta = -\xi \cot \xi \tag{1}$$

gegeben mit $\eta = \frac{a\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$ und $\xi = \frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$. Mit der Definition von

$$\gamma^2 = \frac{V_0}{\frac{\hbar^2}{2ma^2}} \tag{2}$$

können wir schreiben $\eta = \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}$ und finden

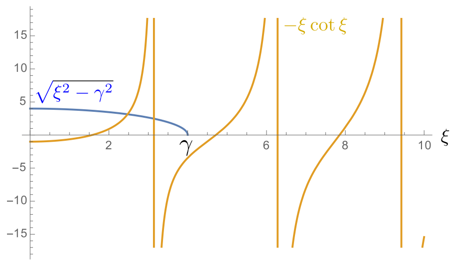
$$\sqrt{\gamma^2 - \xi^2} = -\xi \cot \xi. \tag{3}$$

Nun ist die linke Seite immer größer als 0 und nur definiert für $\xi < \gamma$, die rechte Seite jedoch ist nur größer als 0 für $\xi > \pi/2$, sodass wir die Bedingung bekommen:

$$\pi/2 < \xi < \gamma \tag{4}$$

und somit muss für die Existenz eines gebundenen Zustands gelten

$$V_0 > \frac{\pi^2 \hbar}{8ma^2}. \tag{5}$$



Wie man einfach aus der Skizze rechts sieht, ergibt sich jedes Mal ein neue mögliche Lösung für (3), wenn γ gerade ein halbzahliges Vielfaches von π ist, also $\gamma = (n + 1/2)\pi$ hat genau n gebundene Zustände.

(b) Der Grundzustand eines halbunendlichen Potentials ist identisch zu dem ersten angeregten Zustand des endlichen Potentialtopfs (mit Breite $2a$ wie in der Aufgabenstellung definiert). Dies kommt daher, dass nur die ungeraden Lösungen erlaubt waren und somit hat der Grundzustand des endlichen Potentialtopfs eine niedrigere Grundzustandsenergie.

2. Eigenschaften des Drehimpulsoperators (6 Punkte, schriftlich)

Wir benutzen die gegebenen Identitäten und beweisen somit

(a)

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_+\right] = \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] + i\left[\hat{J}_z, \hat{J}_y\right] = i\hbar\hat{J}_y + \hat{J}_x = \ \hbar\hat{J}_+ \tag{6}$$

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_-\right] = \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] - i\left[\hat{J}_z, \hat{J}_y\right] = i\hbar\hat{J}_y - \hat{J}_x = -\hbar\hat{J}_- \tag{7}$$

$$\left[\hat{J}_+, \hat{J}_-\right] = \left[\hat{J}_x, \hat{J}_x\right] + i\left[\hat{J}_y, \hat{J}_x\right] - i\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] - \left[\hat{J}_y, \hat{J}_y\right] = 2\hbar\hat{J}_z \tag{8}$$

(b)

$$\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_+\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_-\right] = 0. \tag{9}$$

$$\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\right] = \left[\hat{J}_x{}^2, \hat{J}_z\right] + \left[\hat{J}_y{}^2, \hat{J}_z\right] = J_x \underbrace{\left[\hat{J}_x, \hat{J}_z\right]}_{-i\hbar\hat{J}_y} + \underbrace{\left[\hat{J}_x, \hat{J}_z\right]}_{-i\hbar\hat{J}_y} \hat{J}_x + J_y \underbrace{\left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right]}_{i\hbar\hat{J}_x} + \underbrace{\left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right]}_{i\hbar\hat{J}_x} \hat{J}_y = 0.$$

Analog zeigt man, dass $\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_x\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_y\right] = 0$.

Aus der Linearität des Kommutators folgt damit direkt $\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_\pm\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\right] = 0$.

(c)

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z \tag{10}$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z \tag{11}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+\right) + \hat{J}_z^2 \tag{12}$$

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \left(\hat{J}_x + i\hat{J}_y\right)\left(\hat{J}_x - i\hat{J}_y\right) = \hat{J}_x^2 + i\left(\hat{J}_y\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{J}_y\right) + \hat{J}_y^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - i\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar\hat{J}_z \tag{13}$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \left(\hat{J}_x - i\hat{J}_y\right)\left(\hat{J}_x + i\hat{J}_y\right) = \hat{J}_x^2 + i\left(\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x\right) + \hat{J}_y^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar J_z \tag{14}$$

Durch Addition der beiden Terme (13) und (14) erhält man direkt

$$\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ = 2\hat{J}_x^2 + 2\hat{J}_y^2 = 2\hat{\mathbf{J}}^2 - 2\hat{J}_z^2. \tag{15}$$

3. Bahndrehimpuls (7 Punkte, schriftlich)

(a) Wir zeigen nun, dass der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten die Form hat:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\Big(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \quad \text{und} \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{16}$$

Es gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad , \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_\phi = \hat{\mathbf{e}}_r \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta. \tag{17}$$

Der Drehimpulsoperator ist nun also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{L}} =& \hat{\mathbf{r}} \times \nabla = r\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \times \big(\hat{\mathbf{e}}_r\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\big) \\
=& \hat{\mathbf{e}}_\phi\partial_\theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi \\
=& \big(-\sin\phi - \frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_x + \big(\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_y + \partial_\phi\hat{\mathbf{e}}_z \\
=& \big(-\sin\phi - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_x + \big(\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_y + \partial_\phi\hat{\mathbf{e}}_z
\end{aligned} \tag{18}$$

(b) Zuerst schreiben wir die gegebene Wellenfunktion in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\psi(r,\theta,\phi) &= (r\sin\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi + 2r\cos\theta)Ne^{-r^2/\alpha^2} \\
&= (\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta)f(r),
\end{aligned} \tag{19}$$

wobei der radiale Teil in $f(r) = rNe^{-r^2/\alpha^2}$ faktorisiert wurde, da die Drehimpulsoperatoren nicht auf r wirken.
Nun wenden wir $\hat{\mathbf{L}}^2$ auf die Wellenfunktion an

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi(r,\theta,\phi) = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta)f(r) \tag{20}$$

und berechnen nacheinander die Ableitungen

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) = -(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) &= \frac{-1}{\sin^2\theta}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\
&= \frac{-1}{\sin\theta}(cos\phi + \sin\phi)
\end{aligned} \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) &= \frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi - 2\sin\theta) \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\big(\cos\phi + \sin\phi\big) - 2\cos\theta
\end{aligned} \tag{23}$$

kombinieren wir die Terme

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2\psi(r,\theta,\phi) &= \hbar^2\Big((\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) + \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}(\cos\phi + \sin\phi) + 2\cos\theta\Big)f(r) \\
&= \hbar^2\big(2\,(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta)\big)f(r) \\
&= 2\hbar\psi(r,\theta,\phi)
\end{aligned} \tag{24}$$

damit ist $\psi(r,\theta,\phi)$ eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert $2\hbar = l(l+1)\hbar$, womit man $l = 1$ direkt ablesen kann.

(c) Die Kugelflächenfunktionen sind vollständig und orthogonal. Die Koeffizienten könnten also durch Projekt auf diese Zustände gefunden werden. Da wir jedoch schon wissen, dass $l = 1$ gilt, kann der Zustand nur durch eine Superposition der Funktionen $Y_{l=1}^{m}(\theta,\phi)$ ausgedrückt werden. Wir benötigen also nur die drei Kugelflächenfunktionen

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \quad \text{und} \quad Y_1^{-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}. \tag{25}$$

und finden die Koeffizienten durch Vergleich mit (19).

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta,\phi) &= \Big(-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\big(Y_1^1(\theta,\phi) - Y_1^{-1}(\theta,\phi)\big) + i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\big(Y_1^1(\theta,\phi) + Y_1^{-1}(\theta,\phi)\big) + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\theta,\phi)\Big)f(r)\\ &= \Big(\underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-1)(1-i)}_{c_1}Y_1^1(\theta,\phi) + \underbrace{4\sqrt{\frac{\pi}{3}}}_{c_0}Y_1^0(\theta,\phi) + \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(1+i)}_{c_{-1}}Y_1^{-1}(\theta,\phi)\Big)f(r)\end{aligned} \tag{26}$$

In einer Messung von $\hat{L}_z$ können die Werte $\hbar m$ mit $m = -1, 0, 1$ gefunden werden. Wir haben die Wellenfunktion nicht normiert, d.h. $f(r)$ ist also nur bis auf einen konstanten Faktor N bekannt. Bei der Berechnung der Messwahrscheinlichkeiten der verschiedenen Drehimpulswerte fällt $f(r)$ jedoch raus

$$P(m=-1) = \frac{|c_{-1}|^2}{|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2} \tag{27}$$

$$P(m=0) = \frac{|c_0|^2}{|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2} \tag{28}$$

$$P(m=+1) = \frac{|c_1|^2}{|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2} \tag{29}$$

$$|c_{-1}|^2 = \frac{2\pi}{3}|1-i|^2 = \frac{4\pi}{3}, \quad |c_0|^2 = \frac{4^2\pi}{3} \quad \text{und} \quad |c_1|^2 = \frac{2\pi}{3}|1+i|^2 = \frac{4\pi}{3} \tag{30}$$

und somit $|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2 = 6\frac{4\pi}{3}$. Für die Messwahrscheinlichkeiten ergeben sich damit die Werte

$$P(m=-1) = \frac{1}{6} \qquad P(m=0) = \frac{2}{3} \qquad P(m=+1) = \frac{1}{6}. \tag{31}$$

4. Bahndrehimpulserwartungswerte (3 Punkte, mündlich)

(a) Wir beschreiben den gegeben Zustand mit $|l,m\rangle$, sodass

$$\mathbf{L}^2 |l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l,m\rangle \qquad L_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle \tag{32}$$

Nach der Vorlesung gilt für $L_\pm = L_x \pm i L_y$, dass

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, |l, m\pm 1\rangle \tag{33}$$

und $\langle l,m|l',m'\rangle = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$. Damit bekommen wir nun

$$\begin{aligned}\langle\, L_x \,\rangle &= \frac{1\langle\, l,m \mid L_+ + L_- \mid l,m\rangle}{2} \\ &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\langle l,m|l,m+1\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\langle l,m|l,m-1\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\langle\, L_y \,\rangle &= \frac{\langle\, l,m \mid L_+ - L_- \mid l,m\rangle}{2i} \\ &= \frac{\hbar}{2i}\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,\langle l,m|l,m+1\rangle - \frac{\hbar}{2i}\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\langle l,m|l,m-1\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{35}$$

Des Weiteren können wir schreiben $L_x^2 = \left(\frac{L_+ + L_-}{2}\right)^2 = \frac{L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+}{4}$, sodass

$$\begin{aligned}\langle\, L_x^2 \,\rangle &= \frac{\langle\, l,m \mid L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+ \mid l,m\rangle}{4} \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\Big[\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\sqrt{l(l+1)-(m+1)(m+2)}\,\langle l,m|l,m+2\rangle \\ &\quad + \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\sqrt{l(l+1)-(m-1)(m-2)}\,\langle l,m|l,m-2\rangle \\ &\quad + \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}^2\,\langle l,m|l,m\rangle + \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}^2\,\langle l,m|l,m\rangle\Big] \\ &= \hbar^2\frac{l(l+1)-m^2}{2}\end{aligned} \tag{36}$$

Analog bekommen wir für $L_y^2 = \left(\frac{L_+ - L_-}{2i}\right)^2 = \frac{-L_+^2 - L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+}{4}$ auf die selbe Weise

$$\langle\, L_x^2 \,\rangle = \hbar^2\frac{l(l+1)-m^2}{2} \tag{37}$$

(b) Der Zustand, der durch $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ beschrieben wird, ist natürlich gerade der obige Zustand $|l,m\rangle$. Analog wie in der vorigen Aufgabe finden wir hier

$$\langle L_xL_y + L_yL_x\rangle = \frac{1}{2i}\langle L_+^2 - L_-^2\rangle = 0 \tag{38}$$

da $\langle\, L_\pm^2 \,\rangle = 0$.