Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 9
Abgabe: 23.06.2015, Besprechung: 24.06.2015

---

1. Pauli-Matrizen und Spin (10 Punkte, schriftlich)

Die Pauli-Matrizen sind definiert über

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Der $s = \frac{1}{2}$ Spin eines Elektrons kann beschrieben werden durch die Operatoren

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Beweisen Sie die Formel

$$\sigma_j \sigma_k = \mathbb{1}_2 \delta_{jk} + i \epsilon_{jkm} \sigma_m \tag{3}$$

wobei $\mathbb{1}_2 = \mathrm{diag}(1,1)$ und leiten Sie daraus

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkm}\sigma_m \qquad \{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\,\mathbb{1}_2 \delta_{jk} \tag{4}$$

her.

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie für beliebige $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$, dass

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{1}_2 + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma} \tag{5}$$

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Spinoperatoren die Drehimpulsalgebra (welche der Lie-Algebra $su(2)$ entspricht) erfüllen

$$\left[\hat{S}_j, \hat{S}_k\right] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{S}_l \tag{6}$$

(d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände/Eigenvektoren und Eigenwerte der $\hat{S}_i$. In welcher Spin-Eigenbasis arbeiten wir, wenn wir die Pauli-Matrizen als Darstellung des Spins benutzen?

(e) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\vec{S}^2$ und zeigen Sie, dass die Eigenzustände von $\hat{S}_i$ auch Eigenzustände von $\vec{S}^2$ sind. Welche Eigenwerte besitzt $\vec{S}^2$?

(f) (1 Punkt) Seien $|\uparrow\rangle \hat{=} \vec{e}_1$ und $|\downarrow\rangle \hat{=} \vec{e}_2$ nun die Eigenzustände zu S_z. Bestimme die Wirkung der Leiteroperatoren $S_\pm = S_x \pm iS_y$ auf $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ und könnten wir diese auch ohne explizite Rechnung bestimmen?

(g) (2 Punkte) Wir definieren den „Spindrehoperator“ als $U(\vec{\omega}) = e^{-i\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}}{2}}$. Zeigen Sie, dass wir schreiben können

$$U(\vec{\omega}) = \cos(\omega/2)\,\mathbb{1}_2 - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin(\omega/2) \tag{7}$$

wobei $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$ mit der Drehachse $\hat{n}$ und Drehwinkel ω.

(h) (1 Punkt) Führen Sie explizit die Drehung um $\vec{\omega} = \pi/2\vec{e}_y$ für den $|\uparrow\rangle$ Zustand aus und zeigen Sie, dass die „Spin-Drehung“ hier gerade einem Spinflip entspricht.

2. Teilchen im Magnetfeld - Landau-Niveaus (4 Punkte, mündlich)

Ein Teilchen mit der Ladung q befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. Eine geschickte Wahl des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ ist in diesem Fall durch die Landau-Eichung mit $\mathbf{A} = Bx\hat{e}_y$ gegeben.

Wir nehmen an, dass das Teilchen wie in einem 2-dimensionalen Elektronengas auf die xy-Ebene eingeschränkt ist. Damit lautet der Hamilton-Operator des Problems

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{q}{c}B\hat{x}\right)^2\right). \tag{8}$$

In der Aufgabe sollen nun die Eigenfunktionen und Eigenenergien des Problems gefunden werden.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie $[\hat{H}, \hat{p}_y] = 0$, und nutzen Sie dies um die Eigenfunktionen von $\hat{p}_y$, um einen geeigneten Separationsansatz für die Wellenfunktion $\psi(x, y)$ zu machen.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung damit auf die Form des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators gebracht werden kann.

(c) [1 Punkt] Nutzen Sie die Kenntnis der Lösung des harmonischen Oszillators um die Eigenenergien und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators (8) zu finden. Wodurch ist die charakteristische Frequenz ω_c des Problems gegeben?

3. Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld und Spinpräzession(6 Punkte, mündlich)

In einem bahnbrechenden Experiment[1] konnten Stern und Gerlach die Richtungsquantelung des Drehimpulses nachweisen. Sie verwendeten dazu einen Aufbau mit stark inhomogenen Magnetfeld (Abb. 1) und beobachteten, dass ein Silberatomstrahl in zwei Strahlen aufgespalten wird. Dieser auch Stern-Gerlach Apparat genannte Aufbau kann auch verwendet werden um die Spinpräzision genauer zu untersuchen:

Es werden jetzt zwei hintereinander angeordnete Stern-Gerlach-Apparate verwendet. Der erste hat ein inhomogenes Magnetfeld entlang der z-Richtung. Ein Elektronenstrahl spaltet auf, die Elektronen können entweder in den Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ präpariert werden. Der zweite Apparat hat ein Magnetfeld entlang der $\vec{x}$-Richtung. Zwischen den Apparaten wird ein homogenes Magnetfeld B_y in $\vec{y}$-Richtung angelegt und führt zu einer Präzision des Spins während der Flugzeit T zwischen den beiden Stern-Gerlach-Apparaten. An einem Detektor-Schirm hinter dem zweiten Apparat werden nun zwei Punkte beobachtet.

(a) (2 Punkt) Skizzieren Sie den Versuchsaufbau inkl. Strahlengang.

(b) (4 Punkte) Die Intensitäten der beiden beobachteten Punkte hängen vom von Magnetfeld B_y und der Flugzeit T ab. Berechnen Sie jeweils diese Abhängigkeit für die beiden möglichen präparierten Ausgangszustände ($|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$).

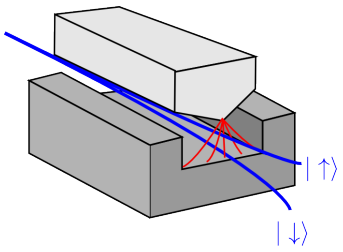

Abbildung 1: Stern-Gerlach-Apparat

[1] Gerlach, W., und O. Stern, 1922, Zeitschrift für Physik, **9**(1), 349, http://dx.doi.org/10.1007/BF01326983