

## Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 9 (Lösungen)

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Abgabe: 23.06.2015, Besprechung: 24.06.2015

## 1. Pauli-Matrizen und Spin (10 Punkte, schriftlich)

(a) Wir berechnen explizit

$$\begin{aligned}\sigma_x \sigma_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 \\ \sigma_x \sigma_y &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_z = i\epsilon_{123}\sigma_z \\ \sigma_x \sigma_z &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y = i\epsilon_{132}\sigma_y \\ \sigma_y \sigma_x &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_z = i\epsilon_{213}\sigma_z \\ \sigma_y \sigma_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2 \\ \sigma_y \sigma_z &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x = i\epsilon_{231}\sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y = i\epsilon_{312}\sigma_y \\ \sigma_z \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_x = i\epsilon_{321}\sigma_x \\ \sigma_z \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2\end{aligned}$$

sodass:

$$\sigma_j \sigma_k = \mathbb{1}_2 \delta_{jk} + i\epsilon_{jkm} \sigma_m \quad (1)$$

Damit folgt natürlich direkt

$$[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j \stackrel{(1)}{=} i\epsilon_{jkm} \sigma_m - i\epsilon_{kjm} \sigma_m = 2i\epsilon_{jkm} \sigma_m \quad (2)$$

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j \stackrel{(1)}{=} 2\delta_{jk} \mathbb{1}_2 + i\epsilon_{jkm} \sigma_m + i\epsilon_{kjm} \sigma_m = 2\delta_{jk} \mathbb{1}_2 \quad (3)$$

(b) Wir nutzen (1) um zu zeigen

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) &= a_j b_k \underbrace{\sigma_j \sigma_k}_{\mathbb{1}_2 \delta_{jk} + i\epsilon_{jkm} \sigma_m} \\ &= a_j b_j \mathbb{1}_2 + i\epsilon_{jkm} a_j b_k \sigma_m \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{1}_2 + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}\end{aligned} \quad (4)$$

(c) Wir berechnen nun

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = \frac{\hbar^2}{4} [\sigma_j, \sigma_k] \stackrel{(2)}{=} \frac{\hbar^2}{4} 2i\epsilon_{jkm} \sigma_m = i\hbar \epsilon_{jkm} \frac{\hbar \sigma_m}{2} = i\hbar \epsilon_{jkm} \hat{S}_m \quad (5)$$

(d) Die normierten Eigenzustände und Eigenwerte der Spinoperatoren sind gerade

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x : \quad & \vec{a}_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & s_x^1 = \frac{\hbar}{2}, s_x^2 = -\frac{\hbar}{2} \\
\hat{S}_y : \quad & \vec{a}_y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \vec{a}_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & s_y^1 = \frac{\hbar}{2}, s_y^2 = -\frac{\hbar}{2} \\
\hat{S}_z : \quad & \vec{a}_z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & s_z^1 = \frac{\hbar}{2}, s_z^2 = -\frac{\hbar}{2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Offensichtlich arbeiten wir in der Basis der  $\hat{S}_z$  Eigenzustände, was man schon an der Diagonalform von  $\hat{S}_z$  ablesen kann.

(e) Wir nutzen die Formel (1) um zu zeigen, dass

$$\vec{S}^2 = \sum_i \hat{S}_i \cdot \hat{S}_i = \frac{\hbar^2}{4} \sum_i \sigma_i \sigma_i = \frac{\hbar^2}{4} \mathbf{1}_2 \sum_i \delta_{ii} = \frac{3}{4} \hbar^2 \mathbf{1}_2 \tag{7}$$

wobei wir die Summe trotz Summenkonvention schreiben um klar zu machen, dass wir am Ende wirklich noch summieren müssen. Da  $\vec{S}^2 \sim \mathbf{1}_2$  ist jeder beliebige Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{C}^2$  ein Eigenzustand zu  $\vec{S}^2$  mit dem Eigenwert  $3/4\hbar^2$ , also auch die Eigenzustände der  $\hat{S}_i$  in (6).

Dies hätten wir auch direkt aus der Drehimpulsalgebra ablesen können, da wir wissen dass:

- (i) gilt  $[\vec{S}^2, \hat{S}_i] = 0$  und damit  $\vec{S}^2$  und  $\hat{S}_i$  gemeinsame Eigenzustände besitzen.
- (ii) ein  $s = 1/2$  Spin für das Drehimpulsquadrat  $\vec{S}^2$  den Erwartungswert  $\hbar^2 s(s+1) = 3/4\hbar^2$  hat.

(f) Die Leiteroperatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\hat{S}_+ &= \hat{S}_x + i\hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{S}_- &= \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

und damit gilt für  $|\uparrow\rangle \hat{=} \vec{e}_1$  und  $|\downarrow\rangle \hat{=} \vec{e}_2$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_+ |\uparrow\rangle &= 0 \\
\hat{S}_+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle \\
\hat{S}_- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle \\
\hat{S}_- |\downarrow\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Wir könnten hier auch einfach ausnutzen, dass die Zustände gerade Drehimpulszustände mit den Quantenzahlen  $j = 1/2$  und  $m = 1/2, -1/2$ , also gerade  $|\uparrow\rangle = |1/2, 1/2\rangle$  und  $|\downarrow\rangle = |1/2, -1/2\rangle$  sind. Die Wirkung der Leiteroperatoren ist nach

$$\hat{L}_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle \tag{10}$$

somit

$$\begin{aligned}
\hat{S}_+ |\uparrow\rangle &= \hat{S}_+ |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2+1)} |1/2, 3/2\rangle = 0 \\
\hat{S}_+ |\downarrow\rangle &= \hat{S}_+ |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2+1)} |1/2, 1/2\rangle = |1/2, 1/2\rangle = |\uparrow\rangle \\
\hat{S}_- |\uparrow\rangle &= \hat{S}_- |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)} |1/2, -1/2\rangle = |1/2, -1/2\rangle = |\downarrow\rangle \\
\hat{S}_- |\downarrow\rangle &= \hat{S}_- |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2-1)} |1/2, -3/2\rangle = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

(g) Wir berechnen

$$U(\vec{\omega}) = e^{-i\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega/2)^m}{m!} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^m \quad (12)$$

wobei  $|\vec{n}| = 1$ . Es gilt nun

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \stackrel{(4)}{=} \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{=1} \mathbb{1}_2 + i \underbrace{(\vec{n} \times \vec{n})}_{=0} \vec{\sigma} = \mathbb{1}_2 \quad (13)$$

und damit

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^m = \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & \text{für } m \text{ ungerade} \\ \mathbb{1}_2 & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases} \quad (14)$$

Wir können daher (11) aufspalten in gerade und ungerade  $m$  Summanden

$$\begin{aligned} U(\vec{\omega}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega/2)^{2m}}{(2m)!} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\omega/2)^{2m+1}}{(2m+1)!} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2m+1} \\ &\stackrel{(12)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2m} (\omega/2)^{2m}}{(2m)!} \mathbb{1}_2 - i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2m} (\omega/2)^{2m+1}}{(2m+1)!} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1)^m (\omega/2)^{2m}}{(2m)!} \mathbb{1}_2 - i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\omega/2)^{2m+1}}{(2m+1)!} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \cos(\omega/2) \mathbb{1}_2 - i \sin(\omega/2) \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned} \quad (15)$$

(h) Für die Drehung um die  $y$ -Achse mit dem Winkel  $\omega = \pi/2$  benötigen wir die Spindrehmatrix

$$U(\pi \cdot \vec{e}_y) \stackrel{(14)}{=} \cos(\pi/4) \mathbb{1}_2 - i \sin(\pi/4) \vec{e}_z \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Die Anwendung auf  $|\uparrow\rangle = \vec{e}_1$  Zustand gibt

$$U(\pi \cdot \vec{e}_y) |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

der Spin dreht in die  $xy$ -Ebene.

Dreht man jedoch mit dem Winkel  $\omega = \pi$  erhält man analog

$$U(\pi \cdot \vec{e}_y) \stackrel{(14)}{=} \cos(\pi/2) \mathbb{1}_2 - i \sin(\pi/2) \vec{e}_z \cdot \vec{\sigma} = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Die Anwendung auf  $|\uparrow\rangle = \vec{e}_1$  Zustand gibt

$$U(\pi \cdot \vec{e}_y) |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle \quad (19)$$

Wir sehen also, dass die  $180^\circ$  Drehung um die  $y$ -Achse gerade den Spin umgedreht hat.

## 2. Teilchen im Magnetfeld - Landau Niveaus (4 Punkte, mündlich)

Ein Teilchen mit der Ladung  $q$  befinde sich in einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ . Eine geschickte Wahl des Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  ist in diesem Fall durch die Landau-Eichung mit  $\mathbf{A} = Bx\hat{e}_y$  gegeben.

Wir nehmen an, dass das Teilchen wie in einem 2-dimensionalen Elektronengas auf die  $xy$ -Ebene eingeschränkt ist. Damit lautet der Hamilton-Operator des Problems

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y - qBx)^2). \quad (20)$$

In der Aufgabe sollen nun die Eigenfunktionen und Eigenenergien des Problems gefunden werden.

(a) [1 Punkt]

Es soll ausgenutzt werden, dass gilt  $[\hat{H}, \hat{p}_y] = 0$  um einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion  $\psi(x, y)$  zu machen:

Da  $\hat{p}_y$  mit dem Hamilton-Operator vertauscht, d.h. Eigenfunktionen des Impulsoperators  $\hat{p}_y$  auch Eigenfunktionen des Hamilton-Operators sind, drängt sich der Separationsansatz

$$\psi(x, y) = e^{ip_y y/\hbar} \chi(x) \quad (21)$$

auf.

(b) [2 Punkt] Setzt man nun diesen Ansatz in die Schrödingergleichung ein, und verwendet gleich  $\hat{P}_y e^{ip_y y/\hbar} = p_y e^{ip_y y/\hbar}$  erhält man

$$\frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + (p_y - qBx)^2)\chi(x) = E\chi(x). \quad (22)$$

Mit der Substitution  $\bar{x} = x - \frac{p_y}{qB} = x - x_0$  sieht man nun deutlich, dass man das Problem auf die Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators zurückgeführt hat:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \frac{m}{2} \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \bar{x}^2\right]\chi(\bar{x}) = E\chi(\bar{x}) \quad (23)$$

(c) [1 Punkt] Die Kenntnis der Lösung des harmonischen Oszillators soll nun genutzt werden um die Eigenenergien und -funktionen des Hamilton-Operators (20) zu finden.

Die Eigenenergien des harmonischen Oszillators mit  $\hat{H} = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$  sind durch  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$  gegeben. Entsprechend sind die Eigenenergien hier

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (24)$$

Die charakteristische Frequenz  $\omega_c$  des Problems ist also die klassische Zyklotronfrequenz.

Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \quad (25)$$

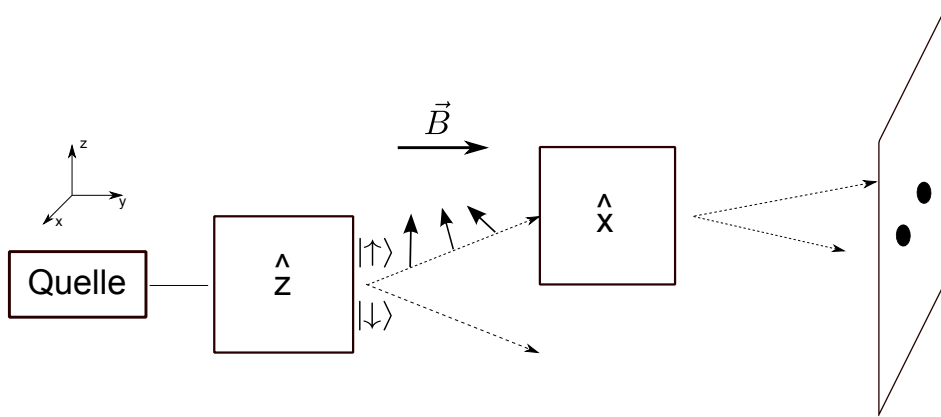
und für das Teilchen im Magnetfeld ergibt sich damit

$$\psi_n(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \ell^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\frac{x - x_0}{\ell}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{\ell}\right)^2\right] e^{ip_y y/\hbar} \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{p_y}{qB}. \quad (26)$$

Im letzten Ausdruck haben wir mit der magnetischen Länge  $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$  zusätzlich die charakteristische Längenskala des Problems eingeführt.

### 3. Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld und Spinpräzession (6 Punkte, mündlich)

(a) Skizze (2 Punkte, mündlich)



(b) (4 Punkte, mündlich)

Nach dem ersten Stern-Gerlach-Apparat ist der Zustand der Teilchen entweder  $|\uparrow\rangle$  (für z.B. den oberen Strahl) und  $|\downarrow\rangle$  (für den unteren Strahl). Während der Flugzeit von einem zum anderen Apparat entwickeln sich die Zustände zeitlich in dem in  $y$ -Richtung angelegten Magnetfeld,

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &\rightarrow |\psi_{\uparrow}(r)\rangle = \frac{e^{-i\omega t/2}}{2}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) + \frac{e^{i\omega t/2}}{2}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) = \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)|\uparrow\rangle - \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)|\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rangle &\rightarrow |\psi_{\downarrow}(r)\rangle = \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right)|\downarrow\rangle + \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)|\uparrow\rangle \end{aligned}$$

mit  $\omega = \mu_B B/\hbar$ . Der zweite Stern-Gerlach-Apparat spaltet die Zustände wieder auf in die Zustände

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \end{aligned}$$

Dementsprechend sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, diese nach der Flugzeit  $T$  zu messen, gegeben durch

$$P(\uparrow_x, \uparrow) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow| + \langle\downarrow|)(\cos(\frac{\omega}{2}T)|\uparrow\rangle - \sin(\frac{\omega}{2}T)|\downarrow\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\omega}{2}T) - \sin(\frac{\omega}{2}T))^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin(\omega T))$$

$$P(\downarrow_x, \uparrow) = \frac{1}{2}(1 + \sin(\omega T))$$

$$P(\uparrow_x, \downarrow) = \frac{1}{2}(1 + \sin(\omega T))$$

$$P(\downarrow_x, \downarrow) = \frac{1}{2}(1 - \sin(\omega T))$$

Die Intensitäten der Punkte auf dem Detektorschirm sind gerade proportional zu diesen Wahrscheinlichkeiten.