Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 10

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Abgabe: 30.06.2015, Besprechung: 01.07.2015

1. Addition von zwei Spins (6 Punkte, mündlich)

Wir betrachten ein System aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ($i=1,2$). Der Spin-Operator $\hat{s}_1$ sei der Operator für den Spin des ersten Teilchens, $\hat{s}_2$ der Operator für den zweiten Spin. Die Operatoren wirken auf verschiedene Teilchen, daher vertauscht jede Komponente des Operators $\hat{s}_1$ mit jeder Komponente von $\hat{s}_2$, es gilt also $[\hat{s}_1, \hat{s}_2] = 0$.

Für jeden der beiden Spins gibt es zwei linear unabhängige Orientierungen und damit vier linear unabhängige Zustände des Gesamtsystems. Wählen wir wieder $\mathbf{z}$ als Quantisierungsachse wird der Hilbertraum durch die gemeinsamen Eigenzustände der Operatoren $\hat{s}_{1,z}$ und $\hat{s}_{2,z}$ aufgespannt. Die Basiszustände können als $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\downarrow\rangle$ geschrieben werden. Das erste Symbol bezieht sich dabei auf den Eigenwert des Operators $\hat{s}_1^z$, das zweite auf den Eigenwert des Operators $\hat{s}_2^z$.

Der Gesamtspin $\hat{s}_{tot}$ des Systems ergibt sich einfach durch die Summe der Einzelspins

$$\hat{s}_{tot} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2. \quad (1)$$

- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{s}_{tot}$ die Kommutatorrelationen der Drehimpuls-Algebra erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass auch die Kommutatorrelation $[\hat{s}_{tot}^2, \hat{s}_{tot}^z] = 0$ gilt.
- (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenzustände und Eigenwerte des Operators $\hat{s}_{tot}^z$ für die z -Komponente des Gesamtspins in der oben beschriebenen Basis.
- (2 Punkte) Finden Sie die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{s}_{tot}^2$ und $\hat{s}_{tot}^z$ und bestimmen Sie für diese Zustände die Eigenwerte des Operators $\hat{s}_{tot}^2$.

Hinweis: Das Produkt $\hat{s}_1\hat{s}_2$ kann durch die Operatoren $\hat{s}_i^z$ und $\hat{s}_i^\pm$, ($i = 1, 2$) dargestellt werden.

2. Eichinvarianz des Stromes (4 Punkte, schriftlich)

Der Strom eines geladenen Teilchens mit Ladung e in einem elektromagnetischen Feld (ohne Spin) ist gegeben durch:

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \quad (2)$$

- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbf{j}$ die Kontinuitätsgleichung erfüllt.
- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbf{j}$ eichinvariant ist. ¹

¹Erinnerung: Eichinvarianz in der Quantenmechanik bedeutet die Invarianz von $\vec{j}$ unter der Transformation $\psi(x) \rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(x)}\psi(x)$ (wobei $x = \vec{r}, t$) bei gleichzeitiger Eichtransformation des Vektorpotentials $\vec{A}(x) \rightarrow \vec{A}(x) - \nabla\Lambda(x)$ sowie des Skalarpotentials $\phi \rightarrow \phi + \frac{1}{c}\partial_t\Lambda(x)$.

3. Operatoren im Heisenbergbild (4 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

Wobei $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Im Heisenbergbild sind im Gegensatz zum Schrödingerbild die Zustände zeitunabhängig, die Operatoren dafür jedoch zeitabhängig.

- (1 Punkt) Benutzen Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung um die Zeitentwicklung der Operatoren $\hat{a}(t)$ und $\hat{a}^\dagger(t)$ zu berechnen.
- (1 Punkt) Berechnen Sie weiter die Zeitentwicklung der Operatoren $\hat{x}(t)$ und $\hat{p}(t)$.
- (1 Punkt) Nutzen Sie die Ergebnisse der vorangegangenen Aufgabenteile um die Kommutatoren $[\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2)]$ und $[\hat{x}(t_1), \hat{p}(t_2)]$ der nun zeitabhängigen Operatoren zu berechnen.
- (1 Punkt) Das System sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle \hat{x}(0)\hat{x}(t) \rangle$.

4. Spin im zeitabhängigen Magnetfeld (6 Punkte, schriftlich)

In der Vorlesung wurde die Larmor-Präzession des Elektronenspins in einem statischen magnetischen Feld in z -Richtung $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ hergeleitet. Im folgenden soll nun das Verhalten des Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens untersucht werden, wenn zusätzlich ein periodisches Magnetfeld in der xy -Ebene eingestrahlt wird.

Betrachten Sie einen Elektronenspin in einem zeitabhängigen externen Magnetfeld

$$\mathbf{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0). \quad (4)$$

- (1 Punkt) Schreiben Sie den Hamiltonoperator des Systems explizit in Matrixform.
- (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich das Problem durch eine geeignete Transformation

$$\psi_\uparrow(t) = a(t)\bar{\psi}_\uparrow(t), \quad \psi_\downarrow(t) = b(t)\bar{\psi}_\downarrow(t)$$

der Spinorkomponenten auf das Problem eines Elektrons in einem statischen Magnetfeld $\bar{\mathbf{B}} = (B_x, 0, B_z)$ zurückführen lässt.

- (2 Punkte) Nutzen Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, 0)$ um die Zeitentwicklung des Zustands $|\bar{\psi}(t)\rangle$ des Elektronenspins in dem effektiven statischen Magnetfeld $\bar{\mathbf{B}}$ zu berechnen.
Hinweis: Die Matrixexponentialfunktion von Pauli-Matrizen war schon Gegenstand der Übungen.
- (2 Punkte) Das Teilchen sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_\downarrow(t)$ den Spin zur Zeit t im Zustand $|\downarrow\rangle$ zu finden. Für welche Frequenz ω des externen Felds und nach welcher Zeit wird die Wahrscheinlichkeit maximal?

Die Anmeldung zur der Veranstaltung in Qispos ist freigeschaltet:

- Vorleistung 1 umfasst die Übungen (inkl. Probleklausur)
- Vorleistung 2 ist die Hauptklausur, Anmeldebeginn ist hier der 1.7.2015.
Bedingung für diese Anmeldung ist die bestandene Vorleistung 1.

(Studiengang Physik, Prüfungsordnung 2010)