Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 10 (Lösungen)
Abgabe: 30.06.2015, Besprechung: 01.07.2015

---

1. Addition von zwei Spins (6 Punkte, mündlich)

(a) (2 Punkte) Zuerst ist zu zeigen, dass der Operator $\hat{\mathbf{s}}_{tot}$ die Kommutatorrelationen der Drehimpulsalgebra erfüllt. Wichtig ist dabei, dass $\hat{\mathbf{s}}_1$ und $\hat{\mathbf{s}}_2$ vertauschen und beide die Drehimpulsalgebra erfüllen.

$$[\hat{s}^i_{tot}, \hat{s}^j_{tot}] = [\hat{s}^i_1 + \hat{s}^i_2, \hat{s}^j_1 + \hat{s}^j_2] = [\hat{s}^i_1, \hat{s}^j_1] + [\hat{s}^i_2, \hat{s}^j_2] = i\varepsilon_{ijk}\hat{s}^k_1 + i\varepsilon_{ijk}\hat{s}^k_2 = i\varepsilon_{ijk}\hat{s}^k_{tot} \tag{1}$$

Daraus folgt auch direkt, dass gilt $[\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}, \hat{s}^z_{tot}] = 0$ (im folgenden sei $\hat{\mathbf{s}} \equiv \hat{\mathbf{s}}_{tot}$):

$$[\hat{\mathbf{s}}^2, \hat{s}^z] = [\hat{s}^2_x, \hat{s}_z] + [\hat{s}^2_y, \hat{s}_z] = -i\hbar(\hat{s}_x\hat{s}_y + \hat{s}_y\hat{s}_x) + i\hbar(\hat{s}_x\hat{s}_y + \hat{s}_y\hat{s}_x) = 0 \tag{2}$$

Dies ist eine Eigenschaft der Drehimpulsalgebra.

(b) (2 Punkte) Da alle Basiszustände Eigenzustände von $\hat{s}^z_1$ und $\hat{s}^z_2$ sind, sind sie auch Eigenzustände von $\hat{s}^z_{tot} = \hat{s}^z_1 + \hat{s}^z_1$:

$$\hat{s}^z_{tot}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \hbar\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \hbar\left|\uparrow\uparrow\right\rangle \tag{3}$$
$$\hat{s}^z_{tot}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \hbar\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = 0 \tag{4}$$
$$\hat{s}^z_{tot}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \hbar\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = 0 \tag{5}$$
$$\hat{s}^z_{tot}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = \hbar\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = -\hbar\left|\downarrow\downarrow\right\rangle \tag{6}$$

Die Eigenwerte von $\hat{s}^z_{tot}$ sind damit 0 und ± 1.
Da $\hat{\mathbf{s}}_{tot}$ die Drehimpulsalgebra erfüllt können wir erwarten, dass $\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}$ die Eigenwerte $s(s+1)$ und $\hat{s}^z_{tot}$ die Eigenwerte $m = -s \cdots + s$ hat. Mit den gefundenen Eigenwerten für $\hat{s}^z_{tot}$ sollte es daher einen Singulett-Zustand mit $s = 0, m = 0$ und Triplett-Zustände mit $s = 1$ und $m = -1, 0, +1$ geben.

(c) (2 Punkte) Da $\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}$ und $\hat{s}^z_{tot}$ vertauschen gibt es einen Satz gemeinsamer Eigenfunktionen. Um die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}$ zu berechnen, drücken wir den Operator zuerst durch $s^\pm_1 = s^x_1 \pm is^y_1$ und $s^\pm_2 = s^x_2 \pm is^y_2$ aus:

$$\hat{\mathbf{s}}^2_{tot} = (\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)^2 = \hat{s}^2_1 + \hat{s}^2_2 + 2\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2 = \tfrac{3}{4}\hbar^2 + \tfrac{3}{4}\hbar^2 + 2s^z_1 s^z_2 + s^+_1 s^-_2 + s^-_1 s^+_2 \tag{7}$$

Die Zustände $\left|\uparrow\uparrow\right\rangle$ und $\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$ sind nicht entartet, müssen also auch Eigenzustände von $\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}$ sein.

$$\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}\left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \hbar^2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + 2\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\right)\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + 0 + 0 = 2\hbar^2\left|\uparrow\uparrow\right\rangle \tag{8}$$
$$\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}\left|\downarrow\downarrow\right\rangle = \hbar^2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + 2\tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}\right)\left|\downarrow\downarrow\right\rangle + 0 + 0 = 2\hbar^2\left|\downarrow\downarrow\right\rangle \tag{9}$$

Die Zustände $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$ und $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$ hingegen sind keine Eigenzustände

$$\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}\left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \hbar^2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + 2\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\right)\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + 0 + \hbar^2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \hbar^2\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) \tag{10}$$
$$\hat{\mathbf{s}}^2_{tot}\left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \hbar^2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + 2\tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}\right)\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \hbar^2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + 0 = \hbar^2\left(\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow\right\rangle\right). \tag{11}$$

Die beiden Zustände sind entartet, damit ist jede Linearkombination $\left|\psi\right\rangle = \alpha\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \beta\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$ auch ein Eigenzustand von $\hat{s}^z_{tot}$.

Wir müssen die Eigenzustände von $\hat{s}^2_{tot}$ in diesem zweidimensionalen Unterraum suchen. Man sieht man aus (11) ohne weitere Rechnung, dass die Linearkombinationen $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ diese Eigenzustände sind:

$$\hat{\mathrm{s}}^2_{tot} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\big) = 2\hbar^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\big) \tag{12}$$

$$\hat{\mathrm{s}}^2_{tot} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\big) = 0. \tag{13}$$

Damit haben wir einen neuen Satz von Basisfunktionen gefunden die durch die Quantenzahlen s und m beschrieben werden:
Wie erwartet, einen Singulett-Zustand mit $s = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\big) \qquad (s = 0, m = 0), \tag{14}$$

und Triplett-Zustände mit $s = 1$

$$|\uparrow\uparrow\rangle \qquad (s = 1, m = +1) \tag{15}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\big) \qquad (s = 1, m = 0) \tag{16}$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle \qquad (s = 1, m = -1). \tag{17}$$

2. Eichinvarianz des Stromes

(a) Betrachte die Schrödingergleichung im Potential V im elektromagnetischen Feld

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[\frac{(\vec{p}-e/c\vec{A})^2}{2m} + V + \phi\right]\psi = \left[\frac{\hbar^2(-i\nabla - \frac{e}{c\hbar}\vec{A})^2}{2m} + V + \phi\right]\psi \tag{18}$$

sodass wir bekommen

$$\nabla^2\psi = \left[i\frac{e}{c\hbar}(\nabla\vec{A} + \vec{A}\nabla) + \frac{e^2}{c^2\hbar^2}\vec{A} + \frac{2m}{\hbar^2}(V + \phi - i\hbar\partial_t)\right]\psi \tag{19}$$

$$= \left[i\frac{e}{c\hbar}((\nabla\vec{A}) + 2\vec{A}\nabla) + \frac{e^2}{c^2\hbar^2}\vec{A} + \frac{2m}{\hbar^2}(V + \phi - i\hbar\partial_t)\right]\psi \tag{20}$$

Betrachte nun die Divergenz des Stroms

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{j} &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \left(\nabla^2\psi^*\right)\psi\right) - \frac{e}{mc}\nabla\mathbf{A}\left|\psi\right|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2im}\Bigg(\psi^*\left[i\frac{e}{c\hbar}((\nabla\vec{A}) + 2\vec{A}\nabla) + \frac{e^2}{c^2\hbar^2}\vec{A} + \frac{2m}{\hbar^2}(V + \phi - i\hbar\partial_t)\right]\psi \\ &\qquad - \psi\left[-i\frac{e}{c\hbar}((\nabla\vec{A}) + 2\vec{A}\nabla) + \frac{e^2}{c^2\hbar^2}\vec{A} + \frac{2m}{\hbar^2}(V + \phi + i\hbar\partial_t)\right]\psi^*\Bigg) \\ &\qquad - \frac{e}{mc}\left[(\nabla\mathbf{A})\left|\psi\right|^2 + \vec{A}\psi^*\nabla\psi + \vec{A}\psi\nabla\psi\right] \\ &= -\partial_t(\psi^*\psi)\end{aligned} \tag{21}$$

welche mit $\rho = \psi^*\psi$ offensichtlich die Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$\partial_t\rho + \nabla\mathbf{j} = 0 \tag{22}$$

(b) Betrachte nun den Strom

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \left(\nabla\psi^*\right)\psi\right) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}\left|\psi\right|^2 \tag{23}$$

unter der lokalen Eichtransformation

$$\psi \to \psi' = e^{i\frac{e}{c\hbar}\Lambda(x)}\psi \qquad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda(x) \qquad \phi \to \phi - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda(x) \tag{24}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned}\vec{j} \to \vec{j}' &= \frac{\hbar}{2im}\left((\psi')^*\nabla\psi' - \left(\nabla(\psi')^*\right)\psi'\right) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}'\left|\psi'\right|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*e^{-i\frac{e}{c\hbar}\Lambda}\nabla\psi e^{i\frac{e}{c\hbar}\Lambda} - \left(\nabla\psi^*e^{-i\frac{e}{c\hbar}\Lambda}\right)e^{i\frac{e}{c\hbar}\Lambda}\psi\right) - \frac{e}{mc}(\mathbf{A} - \nabla\Lambda)\left|\psi\right|^2 \qquad (25) \\ &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(\nabla + i\frac{e}{c\hbar}(\nabla\Lambda))\psi - \left((\nabla - i\frac{e}{c\hbar}(\nabla\Lambda))\psi^*\right)\psi\right) - \frac{e}{mc}(\mathbf{A} - \nabla\Lambda)\left|\psi\right|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \left(\nabla\psi^*\right)\psi\right) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}\left|\psi\right|^2 = \vec{j} \qquad (26)\end{aligned}$$

und somit ist der Strom eichinvariant.

3. Operatoren im Heisenbergbild (4 Punkte, mündlich)

Die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für einen Operator $\hat{A}(t)$ lautet

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}(t)] + \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t}. \tag{27}$$

Im folgenden soll der harmonische Oszillator mit

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \tfrac{1}{2}) \tag{28}$$

betrachtet werden.

(a) (1 Punkt) Die Bewegungsgleichungen für $a(t)$ und $a^\dagger(t)$ sind

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{a}, \hat{H}] = i\omega[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = -i\omega\hat{a} \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}(t) = e^{-i\omega t} a(0) \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}a^\dagger}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = i\omega[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = i\omega\hat{a}^\dagger \qquad \rightarrow \qquad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t} a^\dagger(0) \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

(b) (1 Punkt) $\hat{x}(t)$ und $\hat{p}(t)$ erhält man über die Erzeuger- und Vernichter

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\big(\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t)\big) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t) \tag{32}$$

$$\hat{p}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\big(\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}(t)\big) = p(0)\cos(\omega t) - m\omega x(0)\sin(\omega t). \tag{33}$$

Die Operatoren erfüllen die klassischen Bewegungsgleichungen
Das gleiche Ergebnis erhält man auch durch Lösen des Gleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}(t)] = \frac{p(t)}{m} \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}(t)] = -m\omega^2 x(t). \tag{35}$$

(c) (1 Punkt) Verwendet man diese Ergebnisse erhält man für den Kommutator

$$\begin{aligned}[x(t_1), x(t_2)] &= \frac{1}{m\omega}\cos\omega t_1 \sin\omega t_2 [x(0), p(0)] + \frac{1}{m\omega}\sin\omega t_1 \cos\omega t_2 [p(0), x(0)] \\ &= \frac{i\hbar}{m\omega}\sin\omega(t_2 - t_1)\end{aligned} \tag{36}$$

Der gleiche Operator zu verschiedenen Zeiten vertauscht also nicht unbedingt.

$$\begin{aligned}[x(t_1), p(t_2)] &= \cos\omega t_1 \cos\omega t_2 [x(0), p(0)] - \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 [p(0), x(0)] \\ &= i\hbar\cos\omega(t_2 - t_1)\end{aligned} \tag{37}$$

$\hat{x}(t_1)$ und $\hat{p}(t_2)$ vertauschen dafür bei $t_2 - t_1 = (2n+1)\pi/2\omega$.

(d) (1 Punkt) Das System befindet sich im bei $t = 0$ Grundzustand $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Zur Berechnung der Korrelationsfunktion wechseln wir wieder ins Heisenbergbild wobei $\hat{x}(0) = \hat{x}$ ist.

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}(0)\hat{x}(t)\rangle &= \langle 0|\, \hat{x} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{x} e^{-i\hat{H}t/\hbar}\, |0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\, \big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\big) e^{i\hat{H}t/\hbar} \big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\big)\, |0\rangle\, e^{-i\omega t/2} \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 1|\, e^{i\hat{H}t/\hbar}\, |1\rangle\, e^{-i\omega t/2} = \frac{\hbar}{2m\omega} e^{i\omega t}\end{aligned} \tag{38}$$

4. Spin im zeitabhängigen Magnetfeld (6 Punkte, schriftlich)

(a) (1 Punkt) Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \mu_B B_1 \left[\cos\omega t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\omega t \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] + \mu_B B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Definieren wir die Frequenzen $\omega_{0,1} = \frac{2\mu_B}{\hbar} B_{0,1}$ lässt er sich kompakt schreiben als

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

(b) (1 Punkte) Aus der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{41}$$

erhalten wir die Bewegungsgleichungen für die Komponenten $\psi_\uparrow(t)$ und $\psi_\downarrow(t)$

$$i\frac{\partial \psi_\uparrow}{\partial t} = \frac{\omega_0}{2}\psi_\uparrow + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t}\psi_\downarrow \tag{42}$$

$$i\frac{\partial \psi_\downarrow}{\partial t} = \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t}\psi_\uparrow - \frac{\omega_0}{2}\psi_\downarrow. \tag{43}$$

Die Transformation

$$\psi_\uparrow(t) = e^{-i\omega t/2}\bar{\psi}_\uparrow(t) \qquad \psi_\downarrow(t) = e^{i\omega t/2}\bar{\psi}_\downarrow(t) \tag{44}$$

führt auf ein System von Differentialgleichungen, dessen Koeffizienten nicht mehr zeitabhängig sind

$$i\frac{\partial \bar{\psi}_\uparrow}{\partial t} = -\frac{\omega - \omega_0}{2}\psi_\uparrow + \frac{\omega_1}{2}\psi_\downarrow \tag{45}$$

$$i\frac{\partial \bar{\psi}_\downarrow}{\partial t} = \frac{\omega_1}{2}\psi_\uparrow + \frac{\omega - \omega_0}{2}\psi_\downarrow. \tag{46}$$

Damit haben wir das Problem auf ein System mit dem effektiven Hamiltonoperator

$$\hat{\bar{H}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -(\omega - \omega_0) & \omega_1 \\ \omega_1 & (\omega - \omega_0) \end{pmatrix} \tag{47}$$

zurückgeführt. Dieser entspricht einem Elektronspin im statischen Magnetfeld $\bar{\mathbf{B}} = (B_1, 0, -\frac{\Delta\omega}{2\mu_B})$ mit $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.
Die Transformation (44) kann auch in Matrixform geschrieben werden

$$|\psi\rangle = e^{-i\omega t \sigma_z/2} |\bar{\psi}\rangle \tag{48}$$

ist also eine zeitabhängige Rotation im Spinraum um die z-Achse. Wir sind in ein rotierendes Bezugssystem gewechselt und folgen der Rotation des Magnetfelds $\mathbf{B}_1(t)$.

(c) (2 Punkte) Um die Zeitentwicklung des Zustands $|\bar{\psi}(t)\rangle$ zu bestimmen wenden wir den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t,t') = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')\hat{H}} \tag{49}$$

an:

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t)\hat{\bar{H}}} |\bar{\psi}(0)\rangle = e^{-i(\omega_1\sigma_x/2 - \Delta\omega\sigma_z/2)t} |\bar{\psi}(0)\rangle \tag{50}$$

analog zum letzten Blatt, kann die Rotation im Spinraum auch geschrieben werden als

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = \left(\cos\frac{\Omega t}{2}\mathbb{1} - i\left(\frac{\omega_1\sigma_x}{\Omega} - \frac{\Delta\omega\sigma_z}{\Omega}\right)\sin\frac{\Omega t}{2} \right) |\bar{\psi}(0)\rangle \tag{51}$$

wobei $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \Delta\omega^2}$.

(d) (2 Punkte) Die Amplitude für einen Spinflip von $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ nach $|\psi(t)\rangle = |\downarrow\rangle$ ist

$$\begin{aligned}\langle\downarrow|\psi(t)\rangle = \langle\downarrow| e^{-i\omega t\sigma_z/2} |\bar{\psi}(t)\rangle = e^{i\omega t/2} \langle\downarrow| \Big(\mathbb{1}\cos\frac{\Omega t}{2} - i\left(\frac{\omega_1\sigma_x}{\Omega} - \frac{\Delta\omega\sigma_z}{\Omega}\right)\sin\frac{\Omega t}{2}\Big)|\uparrow\rangle \\ = -ie^{i\omega t/2}\,\frac{\omega_1}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2},\end{aligned} \tag{52}$$

wobei wir $|\bar{\psi}(0)\rangle = |\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ genutzt haben. Man erhält die Wahrscheinlichkeit

$$P_\downarrow(t) = \left|\langle\downarrow|\psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{\omega_1^2}{2\Omega^2}\big(1 - \cos\Omega t\big). \tag{53}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_\downarrow(t)$ erreicht den Maximalwert

$$\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} = \frac{\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2} \tag{54}$$

nach einem π-Puls also $t = \pi/\Omega$.
Dieser hat für ein resonantes Magnetfeld $\omega = \omega_0$ den größten Wert mit $P_\downarrow(\frac{\pi}{\Omega}) = 1$, der Spin wechselt nach der Zeit dann mit Sicherheit.