KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Blatt 11

Abgabe: 07.07.2015, Besprechung: 08.07.2015

---

1. Teilchen im Zentralpotential (6 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen in dem Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{\gamma}{r^2}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die für dieses Potential die Eigenenergien des Teilchens.

Hinweis: Das Problem ist dem in der Vorlesung behandelten Problem des Wasserstoffatoms sehr ähnlich ($\gamma = 0$) und kann analog gelöst werden.

2. Wasserstoffatom, (6 Punkte, schriftlich

(a) (2 Punkte) Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron in einem größerem Abstand vom Kern gefunden wird, als es klassisch energetisch erlaubt ist.

(b) (4 Punkte) Bohr'sches Korrespondenzprinzip
Betrachten Sie das effektive Potential aus Coulomb- und Zentrifugalpotential für $l = n-1$ mit $l > 0$

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2m}\frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} \tag{2}$$

Welchen Radius r_{kl} würde das Elektron klassisch einnehmen? Vergleichen Sie den Erwartungswert von $\langle r\rangle$ und $\langle \frac{1}{r}\rangle$ mit dem klassischen Ergebnis r_{kl} bzw. $1/r_{kl}$. Betrachten Sie den Grenzfall großer Hauptquantenzahlen n.

3. Atomorbitale, (4 Punkte, mündlich)

(a) Geben Sie alle Wasserstoff-Wellenfunktion $\psi(n,l,m)$ für $n = 2$ explizit an, und skizzieren Sie jeweils eine Fläche konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(n,l,m)|^2 = \text{const}$.

(b) Bilden Sie aus den Wellenfunktionen $\psi(n,l,m)$ mit den Quantenzahlen $n = 2, l = 1$ drei orthonormale *reele* Wellenfunktionen ψ_{2p_x} ψ_{2p_y} und ψ_{2p_z} so dass ψ_{2p_x} rotationssymmetrisch um die x-, ψ_{2p_y} umd die y und ψ_{2p_z} um die z-Achse. Skizzieren Sie für diese als p_x-, p_y- und p_z-Orbital bezeichneten Wellenfunktionen eine Fäche konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte.

4. Entartung der Landau-Niveaus, (4 Punkte, mündlich)

Auf Blatt 9 wurde gezeigt, dass geladene Teilchen mit Ladung q in einem homogenen Magnetfeld $B = B\hat{e}_z$ diskrete Energieniveaus haben und die zugehörigen Eigenfunktionen hergeleitet. Diese Landau-Niveaus sind Grundlage für das Verständnis des Quanten-Hall-Effekts.[1] Eine wichtige Rolle spielt dabei die Entartung der Niveaus.

(a) (1 Punkt) Die Landau-Niveaus lassen sich quasiklassisch als die geschlossene Kreisbahnen der Elektronen verstehen. Was wären die Koordinaten der Kreismittelpunkte (x_0, y_0) dieser Orbits ausgedrückt durch Impuls $\mathbf{p}$ und Ort $\mathbf{x}$ des Teilchens?

(b) (3 Punkte) In den Experimenten zum Quanten-Hall-Effekt werden zweidimensionale Systeme verwendet. Die Bewegung der Elektronen ist zusätzlich durch die Abmessung der Probe ($A = L_x \cdot L_y$) eingeschränkt.

- Nehmen Sie periodische Randbedingungen $\psi(0) = \psi(L_x)$ an. Wieviele verschieden Werte kann p_x im Intervall Δp_x einnehmen?
- Was ergibt sich für Δp_x aus der Bedingung, dass der Kreismittelpunkt auf den Bereich $0 < y_0 < L_y$ beschränkt sein muss? (Der Bahnradius ist klein gegen L_y und wird vernachlässigt.)
- Was ergibt sich daraus für die Entartung der Landau-Niveaus?

[1] K. von Klitzing, Rev.Mod.Phys.**58**,519 (1986),doi:10.1103/RevModPhys.58.519