Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 11 (Lösungen)
Abgabe: 07.07.2015, Besprechung: 08.07.2015

---

1. Teilchen im Zentralpotential (6 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen in dem Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{\gamma}{r^2}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die für dieses Potential die Eigenenergien des Teilchens.

Lösung:
Die Rechnung unterscheidet sich der zum Coulomb-Potential nur in der Differentialgleichung für den Radialteil der Wellenfunktion

$$\Big(\frac{1}{2m}\hat{p}_r^2 + V_{eff}(r)\Big)R(r) = ER(r) \tag{2}$$

mit $\hat{p}_r = -i\hbar\frac{1}{r}\partial_r r$. Nun ist

$$V_{eff}(r) = \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2m}\frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r^2} \tag{3}$$

Im Vergleich zu der Rechnung zum Wasserstoffatom ersetzt man

$$\frac{\hbar^2}{2m}l(l+1)- > \frac{\hbar^2}{2m}l(l+1) + \gamma. \tag{4}$$

Führt man nun

$$s(s+1) = l(l+1) + \gamma\frac{2m}{\hbar^2} \tag{5}$$

ein, erhält man formal identische Gleichungen. Die Abbruchbedingung um endliche Lösungen zu erhalten ist dann, dass

$$n - s - 1 = p \tag{6}$$

ganzzahlig ist. Und man erhält für die Energie $E = -\frac{R_0}{n^2}$

$$E_p = -\frac{2e^4 m}{\hbar^2}\Big(2p + 1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8m\gamma}{\hbar}}\Big)^{-2}. \tag{7}$$

Die Grundzustandsenergie hängt nun auch von l ab und die zufällige Entartung ist aufgehoben.

2. Wasserstoffatom, (6 Punkte, schriftlich)

(a) (2 Punkte) Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron in einem größerem Abstand vom Kern gefunden wird, als es klassisch energetisch erlaubt ist.

Der klassisch maximale Radius ist durch den Bohr'schen Radius gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Elektron in einem größerem Abstand vom Kern gefunden wird ist gegeben über die radiale Verteilungsfunktion $r^2|R(r)|^2$

$$\int_{a_0}^{\infty} \mathrm{d}r\, r^2 |R_{1,0}(r))|^2 = \int_{a_0}^{\infty} \mathrm{d}r\, r^2 \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} = \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \frac{1}{4} \left(-a_0^3 + 2a_0^2 x + 2a_0 x^2\right)\Big|_{a_0}^{\infty} = 5e^{-2} \approx 0.68 \tag{8}$$

(b) (4 Punkte) Bohr'sches Korrespondenzprinzip

Betrachten Sie das effektive Potential aus Coulomb- und Zentrifugalpotential für $l = n-1$ mit $l > 0$

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} \tag{9}$$

Die klassische Bahn ergibt sich durch das Minimum des Potentials

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr^3} + \frac{e^2}{r^2} \tag{10}$$

$$r_{klass} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{me^2} = a_0 l(l+1) \tag{11}$$

Wir betrachten den Fall $l = n-1$ und damit

$$r_{kl} = a_0 n(n-1) \qquad \frac{1}{r_{kl}} = \frac{1}{a_0 n(n-1)} \tag{12}$$

Vergleichen Sie den Erwartungswert von $\langle r \rangle$ und $\langle \frac{1}{r} \rangle$ mit dem klassischen Ergebnis. Betrachten Sie den Grenzfall großer Hauptquantenzahlen n. Erwartungswert $\langle r \rangle$:
Wir betrachten $l = n-1$, also $R_{n,n-1}$ wobei gilt $L_0^k = 1$

$$\langle nlm| r |nlm\rangle = N^2 \frac{na_0}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x x^{2n} e^{-x} = \frac{\frac{na_0}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x x^{2n+1} e^{-x}}{\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x^{2n} e^{-x}} = \frac{na_0}{2} \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \tag{13}$$

$$= a_0 n(n + \tfrac{1}{2})) \tag{14}$$

analog[1]

$$\langle n, l, m| \frac{1}{r} |nlm\rangle = N^2 \frac{2}{na_0} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{x} x^{2n} e^{-x} = \frac{2}{na_0} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} = \frac{1}{a_0 n^2} \tag{16}$$

.

Für große n gilt

$$r_{kl} \approx a_0 n^2 \approx \langle r \rangle \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{r_{kl}} \approx \frac{1}{a_0 n^2} \approx \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \tag{17}$$

---

[1] *Hinweis:* Verwendet wird immer das Integral

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für} \quad a > 0, n \in \mathbb{N}, \ (n > -1), \tag{15}$$

das bei Problemen zum Wasserstoffatom häufig auftaucht

3. Atomorbitale, (4 Punkte, mündlich)

(a) Geben Sie alle Wasserstoff-Wellenfunktion $\psi(n,l,m)$ für $n = 2$ explizit an, und skizzieren Sie jeweils eine Fläche konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(n,l,m)|^2 = \text{const}$.
Für $n = 2$ gibt es Wellenfunktionen mit $l = 0$ und $l = 1$. Letztere ist noch dreifach entartet mit $m = -1, 0, 1$:

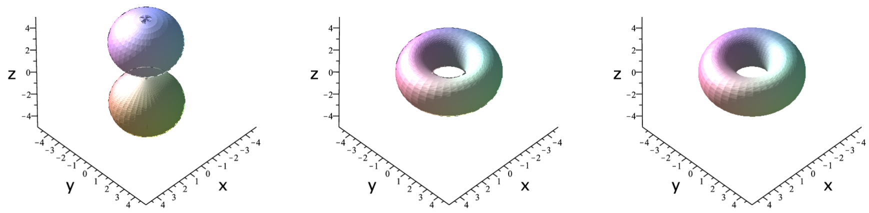
$$\psi(2,0,0) = \frac{2}{(2a_0)^{3/2}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0}\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{18}$$

$$\psi(2,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/(2a_0)}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi} \tag{19}$$

$$\psi(2,1,0) = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/(2a_0)}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{20}$$

$$\psi(2,1,+1) = -\frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/(2a_0)}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{+i\phi} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$



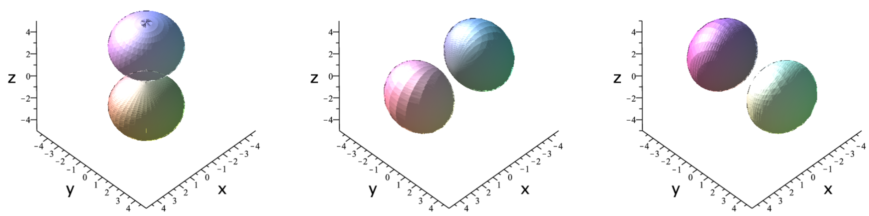
(a) $|\psi(2,1,0)|^2$ (b) $|\psi(2,1,-1)|^2$ (c) $|\psi(2,1,1)|^2$

(b) Bilden Sie aus den Wellenfunktionen $\psi(n,l,m)$ mit den Quantenzahlen $n = 2, l = 1$ drei orthonormale *reele* Wellenfunktionen ψ_{2p_x} ψ_{2p_y} und ψ_{2p_z} so dass ψ_{2p_x} rotationssymmetrisch um die x-, ψ_{2p_y} umd die y und ψ_{2p_z} um die z-Achse. Skizzieren Sie für diese als p_x-, p_y- und p_z-Orbital bezeichneten Wellenfunktionen eine Fäche konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$\psi_{2p_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(2,1,-1) + \psi(2,1,+1)) = R_{2,1}\sin\theta\cos\phi \tag{23}$$

$$\psi_{2p_y} = i\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(2,1,-1) - \psi(2,1,+1)) = R_{2,1}\sin\theta\sin\phi \tag{24}$$

$$\psi_{2p_z} = \psi(2,1,0) = R_{2,1}\cos\theta \tag{25}$$



(d) $|\psi_{2p_z}|^2$ (e) $|\psi_{2p_x}|^2$ (f) $|\psi_{2p_y}|^2$

4. Entartung der Landau-Niveaus, (4 Punkte, mündlich)

Die Entartung der Landau-Niveaus soll untersucht werden. Dabei betrachten wir geladene Teilchen mit Ladung q in einem homogenen Magnetfeld $B = B\hat{e}_z$.

(a) (1 Punkt) Die Landau-Niveaus lassen sich quasiklassisch als die geschlossene Kreisbahnen der Elektronen verstehen. Die Koordinaten der Kreismittelpunkte (x_0, y_0) dieser Orbits sind durch

$$\hat{x}_0 = \frac{c\hat{p}_y}{eB} + \hat{x} \qquad \text{und} \qquad \hat{y}_0 = \frac{c\hat{p}_x}{eB} + \hat{y} \tag{26}$$

gegeben.

(b) (3 Punkte) In den Experimenten zum Quanten-Hall-Effekt werden zweidimensionale Systeme verwendet. Die Bewegung der Elektronen ist zusätzlich durch die Abmessung der Probe ($A = L_x \cdot L_y$) eingeschränkt.

- Wir nehmen periodische Randbedingungen $\psi(0) = \psi(L_x)$. Die Wellenfunktion ist in zwei Dimensionen gegeben durch

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_x x} u(y). \tag{27}$$

  Damit ergibt sich aus der Randbedingung $e^{ik_x L_x} = 1$ für k_x die Quantisierung $k_x = n \cdot 2\pi/L_x$. In einem Intervall Δp_x liegen damit

$$N = \frac{\Delta p_x}{2\pi\hbar/L_x} \tag{28}$$

  verschiedene diskrete Werte von p_x.

- Der Kreismittelpunkt soll innerhalb der Probe liegen damit haben wir die Einschränkung $0 < y_0 < L_y$ und erhalten

$$\Delta p_x = \frac{eBL_z}{c}. \tag{29}$$

- Die Entartung der Landau-Niveaus ist damit gegeben durch

$$N = \frac{L_x}{2\pi\hbar}\Delta p_x = \frac{L_x L_z eB}{2\pi\hbar c}. \tag{30}$$

  Kompakter lässt sich dies durch den Fluss $\phi = A \cdot B$ durch die Probe und das Flussquant ϕ_0 ausdrücken:

$$N = \frac{\phi}{2\pi\hbar c/e} = \frac{\phi}{\phi_0} \qquad \phi_0 = \frac{hc}{e} \tag{31}$$