Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 12

Abgabe: 14.07.2015, Besprechung: 15.07.2015

---

1. Zeeman-Aufspaltung (5 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein Elektron (mit Spin) im Wasserstoffatom im magnetischen Feld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$. Berechnen Sie die Energieniveaus (ohne Spin-Bahn Kopplung) für alle Zustände $|n, l, m, s\rangle$. Geben Sie die Energien für die $n = 1$ und $n = 2$ Zustände explizit an und stellen Sie deren Zeeman-Aufspaltung graphisch dar.

2. Anharmonischer Oszillator (8 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ mit dem ungestörten Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators in einer Dimension:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{1}$$

mit einer anharmonischen Störung

$$\hat{V} = \gamma \cdot \hat{x}^4 \tag{2}$$

Hierbei soll gelten $\gamma \ll \frac{\hbar\omega}{x_0^4}$ mit der charakteristischen Längenskala $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ des harmonischen Oszillators, sodass eine Störungstheorie gerechtfertigt ist (zumindest für die Zustände mit $\left|\langle\hat{V}\rangle\right| \ll \left|\langle\hat{H}_0\rangle\right|$, siehe Teilaufgabe c)).

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie zunächst die Störungs-Matrixelemente $V_{nm} = \langle n \mid \hat{V} \mid m\rangle$, wobei $|n\rangle$ die ungestörten Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind. *Hinweis: Es kann hilfreich sein zunächst das Matrixelement $\langle n \mid \hat{x}^2 \mid m\rangle$ zu berechnen.*

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie nun die Energie- und Zustandskorrektur $E_n^{(1)}$ und $|n^{(1)}\rangle$ der ungestörten Zustände $|n\rangle$ in führender Ordnung in γ.

(c) (1 Punkt) Ausgehend von der Energiekorrektur $E_n^{(1)}$, bestimmen Sie die Quantennummer n, für welche die Störungstheorie zusammenbricht (also für die $\Delta E_n = \hbar\omega = E_n^{(1)}$).

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Energiekorrektur $E_n^{(2)}$ in zweiter Ordnung in γ.

3. Stark Effekt(7 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in seinem Grundzustand in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$.

(a) (1 Punkt) Wir schreiben den Hamiltonoperator des Problems in die Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \tag{3}$$

wobei $\hat{H}_0$ der ungestörte Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms ist. Geben Sie $\hat{V}$ an. *Hinweis: Ein elektrisches Feld koppelt an die Elektronen durch* $V(x) = e \cdot \phi(x)$*, wobei* $\phi(x)$ *das elektrische skalare Potential ist. Bestimmen Sie also* $\phi(x)$ *so, dass* $\vec{E} = -\nabla\phi$.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Energiekorrektur $E_1^{(1)}$ in führender Ordnung für den Grundzustand $n = 1$ des Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass $E_1^{(1)} = 0$.

(c) (2 Punkte) Um Energiekorrekturen höherer Ordnung für den Grundzustand zu bestimmen, muss man Matrixelemente der Form $\langle 1,0,0 \mid \hat{V} \mid n,l,m\rangle$ für $n > 1$ kennen. Zeigen Sie, dass solche Matrixelemente verschwinden, falls $l \neq 1$ und $m \neq 0$.[1]

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie nun die Energiekorrektur zweiter Ordnung $E_1^{(2)}$ für den Grundzustand mit der Näherung, dass nur die Zustände mit $n = 2$ (und nicht höhere Zustände $n = 3, 4, \ldots$) entscheidend beitragen. Zu welcher Potenz tritt hier das elektrische Feld E auf?

Klausur am 20.07.2015 von 17:30 - 19:30 Uhr
Einteilung entsprechend der Anfangsbuchstaben der Nachnamen:

A-R: Gerthsen-Hörsaal
S-Z: Gaede-Hörsaal

- Bringen Sie bitte Ihren Studentenausweis mit.
- Eine Anmeldung per Qispos ist notwendig!
(Falls dies nicht möglich ist, eine E-Mail an die Übungsleiter)
- Als Hilfsmittel ist ein doppelseitiges, handbeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt.

[1] Nutzen Sie, dass $z = r\cos\theta = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)$ sowie $\psi_{n,l,m}(\vec{r}) = u_{n,l}(r)\cdot Y_{l,m}(r)$, wobei $u_{n,l}(r)$ der Radialteil der Wellenfunktion ist und $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ die (orthonormalen) Kugelflächenfunktionen sind mit

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l',m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{n,n'}$$