Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Physik (ITP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Moderne Theoretische Physik I (TheoD, QM I)
Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: ____X____

Übungsblatt 0

Aufgabe 0.1: Diracsche δ-Funktion

Die Delta-Funktion wurde von P.A.M. Dirac eingeführt und spielt eine besondere Rolle in der theoretischen Physik. Streng genommen ist sie nicht eine echte Funktion im üblichen Sinn, sondern eine *Distribution*. Die δ-Funktion wird folgendermaßen definiert:

$$\delta(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{für } x \neq 0\,, \\ \infty\,, & \text{für } x = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

sodass das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) \;=\; 1 \tag{2}$$

ist. Diese Definition benutzend, beweisen Sie die folgenden Aussagen bezüglich der Eigenschaften der δ-Funktion:

- Für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\delta(x-a) \;=\; f(a)\,. \tag{3}$$

Bemerkung: Die Integration erstreckt sich über den ganzen Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Integrationsgrenzen brauchen aber nicht $\pm\infty$ zu sein. Das Integrationsgebiet is beliebig, muss aber den Punkt enthalten, in dem die δ-Funktion nicht verschwindet.

- Die δ-Funktion ist eine gerade Funktion, d.h. $\delta(x) = \delta(-x)$, und

$$\delta(ax) \;=\; \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,, \quad \text{für } a \in \mathbb{R}/\{0\}\,. \tag{4}$$

- Es sei angenommen, dass die Funktion $g(x)$, die eindeutig im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist, eine Reihe von Nullstellen $\{a_1, a_2, ...\}$ besitzt. Es gilt

$$\delta(g(x)) \;=\; \sum_{i=1,2,...} \frac{1}{|g'(a_i)|}\,\delta(x - a_i)\,, \tag{5}$$

  worin $g'(x)$ die Ableitung der Funktion $g(x)$ nach x bedeutet.

- Die δ-Funktion $\delta(x)$ kann als Grenzwert einer Funktion angesehen werden, die außerhalb eines kleinen Intervalls um den Punkt $x = 0$ gleich Null ist, dort aber an der Stelle $x = 0$ divergiert, sodass der Gleichung (2) trotzdem genügt ist. Die folgende Gleichungen gelten

$$\delta(x) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}\,, \tag{6a}$$

$$\delta(x) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2/\varepsilon}\,. \tag{6b}$$

- Die δ-Funktion $\delta(x)$ kann auch als das Integral dargestellt werden. Eine der (wichtigsten) Integral-Darstellungen der δ-Funktion lautet

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\, e^{ikx}\,. \tag{7}$$

  Hinweis: Um diese Beziehung zwischen der Delta-Funktion und der ebenen Welle zu beweisen, suchen Sie zuerst nach einer Funktion $g(x, k)$ mit zwei Variablen x und k, deren Grenzwert nach der Integration über die Variable k die δ-Funktion ergibt. Berechnen Sie danach den Grenzwert dieser Funktion, ohne sie über die Variable k zu integrieren.

Aufgabe 0.2: Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung is eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die die Konsequenz irgendeines Erhaltungssatzes darstellt. In der Hydrodynamik lautet diese wie folgt

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) \;=\; 0\,, \tag{8}$$

worin ρ und $\vec{v}$ die Dichte bzw. die Geschwindigkeit eines Volumenelementes der Flüssigkeit beschreiben.

- Welchen Erhaltungssatz beschreibt die Kontinuitätsgleichung in der Hydrodynamik?
- Leiten Sie die Integralform der Kontinuitätsgleichung her.
- Geben Sie andere Beispiele einer analogen Gleichung in der Physik.
- Beschreiben Sie eine physikalische Situation, in der die Kontinuitätsgleichung nicht gültig sein kann.