Institut für Theoretische Physik (ITP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Moderne Theoretische Physik I (TheoD, QM I)
Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: ______________________ Übungsgruppe: ________ Punkte: ________

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1: Die 1-dimensionale Schrödinger-Gleichung: Potentialtopf (12 Punkte)

Die Schrödinger-Gleichung im 1-dimensionalen Ortsraum lautet wie folgt

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,q) \;=\; \hat{H}\,\psi(t,q)\,, \tag{1}$$

worin $\hbar$ die reduzierte Plancksche Konstante und $\psi(t,q)$ die Wellenfunktion eines Teilchens sind. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ legt die Zeitentwicklung der Wellenfunktion fest und sei von der From

$$\hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + U(q)\,, \tag{2}$$

wobei $U(q)$ das Potential, in dem sich das Teilchen befindet, ist. Das Potential sei

$$U(q) \;=\; \begin{cases} U_1\,, & \text{für}\;\; q \;>\; a\,, \\ U_2\,, & \text{für}\;\; b \;<\; q \;<\; a\,, \\ U_3\,, & \text{für}\;\; q \;<\; b\,, \end{cases} \tag{3}$$

wobei $U_2 < U_1 < U_3$. Die Energie des Teilchens beträgt E, sodass $U_2 < E < U_1$ gilt.

(a) Legen Sie die allgemeine Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung in jedem Bereich des Raumes fest, indem Sie berücksichtigen, dass die Wellenfunktion des Teilchens für $|q| \to \infty$ verschwinden soll. **(6 Punkte)**

(b) Verwenden Sie die Differenzierbarkeit[1] der Wellenfunktion an den Stellen $q = a$ und $q = b$, um alle Konstanten der Integration zu bestimmen. **(3 Punkte)**

[1] Eine Funktion bezeichnet man als differenzierbar, wenn sie und ihre 1. Ableitung stetig sind.

(c) Welche Werte kann die Energie des Teilchens annehmen? **(3 Punkte)**

Aufgabe 3.2: Die De-Broglie-Wellenlänge (6 Punkte)

(a) Bei Experimenten zur Bestimmung der Verbreitungsgeschwindigkeit von Radiowellen der Länge $\lambda = 300\,\mathrm{m}$ wurde festgestellt, dass ihre Geschwindigkeit u im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c mit einer Genauigkeit 0.05% übereinstimmt. Dieses Resultat der Experimente benutzend, schätzen Sie die obere Grenze der Masse von Photonen ab. **(3 Punkte)**

Hinweis: Benutzen Sie die Energie-Impuls-Relation eines Teilchens der Masse m, d.h. $E^2 = (mc^2)^2 + (\mathbf{p}c)^2$, um den Viererimpuls p^μ des Teilchens zu bestimmen. Die Vierergeschwindigkeit des Teilchens ist durch $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, worin τ die Eigenzeit ist, gegeben.

(b) Bei Experimenten zur Bestimmung der Entfernung zwischen Erde und Mond durch die Ortung der Mondoberfläche wurde festgestellt, dass Meßergebnisse im optischen Bereich und Radiobereich ($\lambda = 20\,\mathrm{cm}$) im Widerspruch zueinander stehen. Diese Tatsache kann durch die Unebenheit der Mondoberfläche in der Größenordnung von $\Delta L = \pm 100\,\mathrm{m}$ klargemacht werden. Andererseits kann man dieses Ergebnis mit Hilfe der nichtverschwindenden Masse von Photonen erklären. Diese Interpretation der Meßergebnisse annehmend, schätzen Sie die obere Grenze der Masse von Photonen ab. **(3 Punkte)**

Aufgabe 3.3: Wahrscheinlichkeitserhaltung (6 Punkte)

Es sei daran erinnert, dass $|\psi(t,q)|^2 dq$ die Wahrscheinlichkeit ist, ein Teilchen zur Zeit t im Intervall dq bei q zu finden. Da das betrachtete Teilchen zu jedem Zeitpunkt irgendwo sein muss, gilt

$$\int dq\, |\psi(t,q)|^2 \;=\; 1\,. \tag{4}$$

Dieses entspricht der Normierung einer Wellenfunktion in der Quantenmechanik.

(a) Beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen irgendwo im Raum zu finden, von der Zeit unabhängig ist. **(3 Punkte)**

Anmerkung: Das hat zur Folge, dass man die Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen im Rahmen der Quantenmechanik nicht beschreiben kann. Dazu sollte man die Quantenfeldtheorie verwenden.

(b) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m zur Zeit $t = 0$ sei $\psi_0(q) = (2\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}} \exp(-\alpha q^2)$, worin $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktion zur Zeit $t > 0$ durch

$$\psi(t,q) \;=\; \frac{(2\alpha/\pi)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1 + 2i\alpha\hbar t/m}} \exp\left(-\frac{\alpha q^2}{1 + 2i\alpha\hbar t/m}\right). \tag{5}$$

gegeben sein soll. Bleibt die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(t,q)|^2$ erhalten? Unter welcher Bedingung ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Allgemeinen von der Zeit unabhängig? **(3 Punkte)**