Institut für Theoretische Physik (ITP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Moderne Theoretische Physik I (TheoD, QM I)

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Der Potentialwall (8 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Potential, das von der Form ist

$$U(q) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } q > L\,, \\ U_0\,, & \text{für } 0 < q < L\,, \quad \text{wobei} \quad U_0 > 0\,, \\ 0\,, & \text{für } q < 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

Das Teilchen bewege sich von links nach rechts. Die Energie des Teilchens sei $E > 0$ und $E < U_0$.

(a) Legen Sie die physikalisch akzeptable Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung fest, indem Sie annehmen, dass sie den Randbedingungen $\psi(q) = S\exp(i\kappa q)$ für $q > L$ und $\psi(q) = \exp(i\kappa q) + R\exp(-i\kappa q)$ für $q < 0$ genügt. **(3 Punkte)**

(b) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizient T, der als $|S|^2$ definiert ist. **(3 Punkte)**

(c) Unter welchen Bedingungen strebt der Koeffizient T gegen 0? **(2 Punkte)**

Aufgabe 4.2: Der unendlich hohe Potentialtopf (10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in dem folgenden Potential

$$U(q) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{für } |q| > a\,, \\ 0\,, & \text{für } |q| < a\,. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Legen Sie die physikalisch akzeptable Wellenfunktion in diesem Potential fest. **(1 Punkt)**

(b) Berechnen Sie das physikalisch erlaubte Spektrum der Energie $\{E_n\}$. **(2 Punkte)**

(c) Zeigen Sie, dass das Spektrum, das in Aufgabe 3.1.c erhalten wurde, für $U_2 \to 0$, $U_{1,3} \to +\infty$ und $b = -a$ in $\{E_n\}$ übergeht. **(1 Punkt)**

(d) Es sei angenommen, dass sich N Elektronen in diesem Potential befinden. Bestimmen Sie den minimalen Wert der Energie $E_{\min}$ der Elektronen und die Kraft F, mit der diese Teilchen gegen die Wände des Potentialtopfs drücken. Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen kann vernachlässigt werden. **(3 Punkte)**

Hinweis: Ziehen Sie in Betracht, dass das Pauli-Prinzip für Elektronen gilt. Das Prinzip besagt, dass jedes Niveau mit höchstens zwei Elektronen unterschiedlichen Spins besetzt ist. Das heißt, dass sich nur zwei Elektronen in jedem Energiezustand befinden können.

(e) Ein Klumpen von Neutronen fliege auf eine undurchdringliche Wand hinein. In der gibt es eine Öffnung. Ihre Höhe d und Breite l sind $d = 10^{-3}\,\mathrm{cm}$ bzw. $l \gg d$. Die Länge der Wand ist $L \gg l$. Bei welchen Werten der Geschwindigkeit v können die Neutronen durch die Öffnung durchgehen? Wie groß ist der minimale Wert der Geschwindigkeit? **(3 Punkte)**

Hinweis: Da die Breite der Öffnung viel kleiner als ihre Höhe ist, kann das Problem auf den 1-dimensionalen Potentialtopf reduziert werden.

Aufgabe 4.3: Der Mittelwert und die mittlere quadratische Schwankung (6 Punkte)

Ein Mittelwert $\langle x \rangle$ einer fluktuierenden Variablen x beschreibt die Zahl, die x im Mittel annimmt. Man bezeichnet $\delta x = x - \langle x \rangle$ als Fluktuation. Die mittlere quadratische Schwankung ist durch

$$\Delta x \;=\; \sqrt{\langle \delta x^2 \rangle} \;=\; \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3}$$

definiert. Diese Größen sind wichtige Charakteristiken einer Zufallsvariablen.

(a) Wir nehmen an, dass die fluktuierende Variable x nur diskrete und nichtnegative Werte n annehmen kann. Die Verteilung der Variablen x sei mit der Poisson-Verteilung identifiziert:

$$P_\lambda(n) \;=\; \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} , \quad n \,\in\, \mathbb{N}_0 . \tag{4}$$

Berechnen Sie den Mittelwert $\langle x \rangle$ und die Schwankung Δx der Variablen x. **(2 Punkte)**

(b) Es sei angenommen, dass die Verteilung durch

$$P_{a,b}(n) \;=\; A \exp\left(-\frac{a}{b}\big(n + 1/2\big)\right) , \quad a, b \;>\; 0 . \tag{5}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie den Vorfaktor A. Berechnen Sie danach den Mittelwert der Variablen $x = an$ und ihre Schwankung Δx. Vergleichen Sie Ihres Ergebnis für $\langle x \rangle$ mit der Planckschen Verteilung $\rho(\nu, T)$ (siehe Aufgabe 1.2). Interpretieren Sie die Parameter a und b physikalisch, indem Sie berücksichtigen, dass die Größe $(8\pi\nu^2/c^3)d\nu$ die Zustandsdichte (die Anzahl der elektromagnetischen Wellen) im Frequenzintervall der Strahlung zwischen ν und $\nu + d\nu$ ist. Was ist dann die physikalische Bedeutung des Mittelwertes $\langle x \rangle$? **(4 Punkte)**