



Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Physik (ITP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Moderne Theoretische Physik I (TheoD, QM I)
Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- Abgabe am Montag, den 06.06.2016; Besprechung am Mittwoch, den 08.06.2016
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link:
https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter <https://campus.studium.kit.edu>

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1: Der harmonische Oszillator (12 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem quadratischen Potential, d.h. der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2}, \quad (1)$$

worin die Frequenz ω das Potential beschreibt.

- (a) Die allgemeine Lösung der klassischen Hamilton-Gleichungen ist

$$q = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a e^{-i\omega t} + b e^{+i\omega t} \right), \quad (2)$$

worin a und b Konstanten der Integration sind. Aus welcher physikalischen Forderung folgt, dass $b = a^*$ sein muss? **(1 Punkt)**

- (b) In der Quantenmechanik werden die Funktionen q und $p = m\dot{q}$ zu hermiteschen Operatoren \hat{q} und \hat{p} zum Zeitpunkt $t = 0$. Da q und p durch a und a^* ausgedrückt werden können, werden a und a^* zu nicht-hermiteschen Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger . Zeigen Sie, dass $[\hat{a}, \hat{a}] = 0$, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ und $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$ gelten. **(3 Punkte)**

Bemerkung: Die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger bezeichnet man als Absteigeoperator bzw. Aufsteigeoperator in der Quantenmechanik. In der Quantenfeldtheorie sind solche Operatoren von großer physikalischer Bedeutung, weil diese dem Vernichtungsoperator bzw. Erzeugungsoperator eines Teilchens entsprechen.

- (c) Drücken Sie den Hamiltonoperator \hat{H} durch die Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger aus. Bestimmen Sie danach den minimalen Wert der Energie des Teilchens in diesem Potential. **(2 Punkte)**
- (d) Man bezeichnet den Zustand der minimalen Energie als $|0\rangle$. Beweisen Sie, dass $\hat{a}|0\rangle = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $|1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger|0\rangle$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert 1 ist. Zeigen Sie, dass $|0\rangle = \hat{a}|1\rangle$ gilt. Berechnen Sie die Energie des Teilchens im Zustand $|1\rangle$. Vergleichen Sie danach $E_1 = \langle 1|\hat{H}|1\rangle$ mit $E_0 = \langle 0|\hat{H}|0\rangle$. **(4 Punkte)**
- (e) Zeigen Sie, dass der normierte und wie folgt definierte Zustand

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

ein Eigenzustand des Operators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ zum Eigenwert n ist. Zeigen Sie danach, dass der Zustand $|n\rangle$ der Energie $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ entspricht. **(2 Punkte)**

Aufgabe 7.2: Vollständigkeit (6 Punkte)

Betrachten Sie den von den Funktionen $\{1, \sin x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x\}$ aufgespannten Vektorraum (der Definitionsbereich der Funktionen sei $[0, 2\pi]$).

- (a) Bestimmen Sie die Dimension des Raumes. **(2 Punkte)**
- (b) Geben Sie eine Basis an und zeigen Sie deren Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit. **(4 Punkte)**

Aufgabe 7.3: Die Schwarzsche Ungleichung (6 Punkte)

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung:

$$|\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} - \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}| \leq \sqrt{\langle \psi + \phi, \psi + \phi \rangle} \leq \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} + \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} \quad (4) \quad \textbf{(4 Punkte)}$$

- (b) Betrachten wir nun einen Zustand mit der Wellenfunktion χ , in dem ein linearer Operator \hat{O} die verschwindende Standardabweichung besitzt. Zeigen Sie, dass die Schwarzsche Ungleichung für Zustände χ und $\hat{O}\chi$ saturiert ist, d.h. die Schwarzsche Gleichung gilt. **(2 Punkte)**