

- Abgabe am Montag, den 27.06.2016; Besprechung am Mittwoch, den 29.06.2016
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link:
https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter <https://campus.studium.kit.edu>

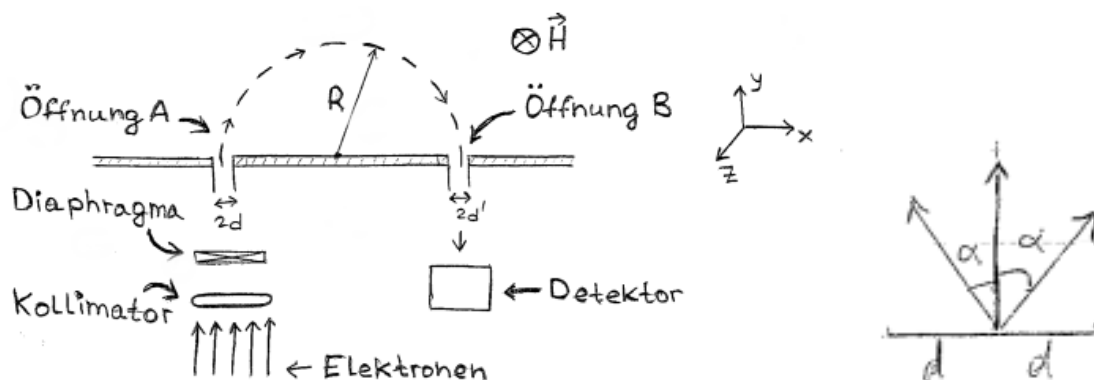
Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1: Impulsmessung und Unschärferelation (8 Punkte)

Betrachten wir die folgende Methode der Impulsmessung (siehe Skizze links): Durch die Ablenkung eines geladenen Teilchens in einem konstanten Magnetfeld wird der Impuls dieses Teilchens bestimmt.

- (a) Drücken Sie den Krümmungsradius R eines Elektrons durch seinen Impuls im Magnetfeld $\mathbf{H} = (0, 0, -H)$ aus, indem Sie annehmen, dass $p_x = p_z = 0$ am Zeitpunkt $t = 0$ gilt. **(1 Punkt)**
- (b) Bestimmen Sie die klassische Impulsunschärfe Δp_y wegen nicht-verschwindender Größe der Öffnungen A und B, wenn das Elektron die Öffnung B erreicht. **(3 Punkte)**



- (c) Bestimmen Sie die Ortsunschärfe Δy des Elektrons, wenn es die Öffnung B erreicht.

(3 Punkte)

Hinweis: An der Stelle A wird es eine Impulsunschärfe in x-Richtung wegen Diffraction geben, so dass $\alpha \sim \lambda/d$ gilt (siehe Skizze rechts). Verwenden Sie die De-Broglie-Wellenlänge des Elektrons, um die Unschärfe Δp_x quantitativ abzuschätzen.

- (d) Überzeugen Sie sich davon, dass die Heisenbergsche Unschärferelation in y-Richtung gilt.

(1 Punkt)

Aufgabe 10.2: Die Kugelflächenfunktionen (8 Punkte)

Die assoziierten Legendrepolynome sind definiert als

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (1)$$

mit $x \in [-1, +1]$, $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l$ und erfüllen die folgende Differentialgleichung

$$(1-x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_l^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l^m(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m(x) = 0. \quad (2)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (3)$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen als Funktionen auf der Kugel stetig sind.

(1 Punkt)

- (b) Der Drehimpulsoperator lautet in Kugelkoordinaten

$$\hat{l}_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4a)$$

$$\hat{l}_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4b)$$

$$\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (4c)$$

Berechnen Sie $\hat{l}^2$ und zeigen Sie, dass $\Delta = -\hat{l}^2/(\hbar^2 r^2) + (1/r^2) \partial_r (r^2 \partial_r)$, wobei Δ der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $((x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta))$ ist. **(3 Punkte)**

- (c) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ gemeinsame Eigenfunktionen zu den Operatoren $\hat{l}_z$ und $\hat{l}^2$ sind und bestimmen Sie die Eigenwerte. **(4 Punkte)**

Aufgabe 10.3: Das Zentralpotential (8 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Zentralpotential, d.h. der Hamilton-Operator ist

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r). \quad (5)$$

Betrachten wir ein Potential der folgenden Form

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r < R, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6)$$

- (a) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für den Drehimpuls $l = 0$ und finden Sie die Grundzustandsenergie, indem Sie annehmen, dass $\psi(\mathbf{x}) = (y_l(r)/r)Y_l^m(\theta, \phi)$ ist. **(3 Punkte)**
- (b) Für $l \neq 0$ ist die Lösung gegeben durch $\psi(\mathbf{x}) \propto j_l(kr)Y_l^m(\theta, \phi)$, wobei $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Die Funktionen $j_n(x)$ werden sphärische Besselfunktionen erster Art genannt. Bestimmen Sie die Energiewerte der Zustände mit $l = 1$ und $l = 2$. Bestimmen Sie danach den Entartungsgrad dieser Zustände. **(5 Punkte)**