



Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Physik (ITP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Moderne Theoretische Physik I (TheoD, QM I)

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer

Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- Abgabe am Montag, den 04.07.2016; Besprechung am Mittwoch, den 06.07.2016
- Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link:
https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html
- Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter <https://campus.studium.kit.edu>

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1: Die Matrixdarstellung von Operatoren (8 Punkte)

- (a) In einem dreidimensionalen Hilbert-Raum seien zwei lineare Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle\}$ definiert:

$$\begin{aligned}\hat{A}|\alpha_1\rangle &= 3|\alpha_1\rangle - i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle, \\ \hat{A}|\alpha_2\rangle &= i\sqrt{2}|\alpha_1\rangle + 2|\alpha_2\rangle - i\sqrt{2}|\alpha_3\rangle, \\ \hat{A}|\alpha_3\rangle &= |\alpha_1\rangle + i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + 3|\alpha_3\rangle,\end{aligned}\tag{1}$$

sowie

$$\begin{aligned}\hat{B}|\alpha_1\rangle &= |\alpha_1\rangle + i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle, \\ \hat{B}|\alpha_2\rangle &= -i\sqrt{2}|\alpha_1\rangle + i\sqrt{2}|\alpha_3\rangle, \\ \hat{B}|\alpha_3\rangle &= |\alpha_1\rangle - i\sqrt{2}|\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

Beweisen Sie, dass die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch sind und einen Satz von gemeinsamen Zuständen besitzen. **(3 Punkte)**

- (b) Betrachten wir ein Teilchen der Masse m in einem Quadratpotential, das durch die Frequenz ω beschrieben ist. Bestimmen Sie nicht-verschwindende Matrixelemente q_{nm} und p_{nm} von den Operatoren $\hat{q}$ bzw. $\hat{p}$ in der Basis $\{|n\rangle\}$, die in Aufgabe 7.1 eingeführt wurde. Bestimmen Sie auch die Dimension dieser Matrizen q_{nm} und p_{nm} **(5 Punkte)**

Aufgabe 11.2: Satz von Ehrenfest (8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie im Rahmen der Schrödingerschen Wellenmechanik das Ehrenfestsche Theorem für ein Teilchen der Masse m in einer Dimension, das sich in einem Potential $V(q)$ bewegt:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{q} \rangle = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -\langle \hat{V}'(q) \rangle. \quad (4 \text{ Punkte}) \quad (3)$$

- (b) Zeigen Sie weiter, dass der Ortserwartungswert $\langle \hat{q} \rangle$ die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{q} \rangle = -\hat{V}'(\langle q \rangle) \quad (4)$$

erfüllt, falls $\hat{V}(q)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades in q ist. (3 Punkte)

- (c) Angenommen, $\hat{V}(q)$ sei kein Polynom höchstens zweiten Grades in q . Wie geartet muss eine Wellenfunktion sein, damit die Newtonsche Bewegungsgleichung zumindest näherungsweise gilt? (Qualitative Antwort genügt) (1 Punkt)

Aufgabe 11.3: Das Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild (8 Punkte)

- (a) Für ein abgeschlossenes System ($\partial \hat{H} / \partial t = 0$) sei $\hat{A}_S$ eine Observable im Schrödinger-Bild, $\hat{A}_H$ die entsprechende des Heisenberg-Bildes. Beide Bilder mögen zur Zeit $t_0 = 0$ übereinstimmen. Der Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle$ sei Eigenzustand von $\hat{A}$. Zeigen Sie, dass $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ Eigenzustand zu $\hat{A}_H(-t)$ mit demselben Eigenwert ist. (4 Punkte)
- (b) Ein kräftefreies Teilchen besitze die Masse m . Bestimmen Sie die zeitabhängigen Operatoren $\hat{q}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$. Berechnen Sie auch die folgenden Kommutatoren: $[\hat{q}_H(t), \hat{q}_H(t')]$, $[\hat{p}_H(t), \hat{p}_H(t')]$ und $[\hat{q}_H(t), \hat{q}_H(t')]$. (4 Punkte)