Institut für Theoretische Physik (ITP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Moderne Theoretische Physik I (TheoD, QM I)

Dozent: Prof. Dr. Frans R. Klinkhamer
Assistent: Dr. Viacheslav A. Emelyanov

- `Abgabe am Montag, den 18.07.2016; Besprechung am Mittwoch, den 20.07.2016`
- `Aktuelle Informationen zur Vorlesung befinden sich unter folgendem Link: https://www.itp.kit.edu/~slava/quantenmechanik_ss_16.html`
- `Melden Sie sich rechtzeitig für Vorleistung und Klausur durch das QISPOS-System an. Dies ist erforderlich und erfolgt unter https://campus.studium.kit.edu`

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ________

Übungsblatt 13

Aufgabe 13: Streutheorie (24 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Stromdichte der Wellenfunktion, welche aus einer in z-Richtung einfallenden ebenen Welle und der Streuwelle zusammengesetzt ist, d.h.

$$\psi(\mathbf{r}) \;=\; e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\,, \quad r \;=\; |\mathbf{r}| \tag{1}$$

Welche Interferenzterme treten auf? **(4 Punkte)**

Hinweis: Verwenden Sie sphärische Koordinaten, um den Gradienten der Wellenfunktion zu berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass die asymptotische Lösung $\psi(\mathbf{r})$ des Streuproblems die Schrödinger-Gleichung erfüllt, wenn das Streupotential für $r \to \infty$ stärker als $1/r$ abfällt. **(2 Punkte)**

(c) Es sei bei reiner s-Streuung[1] der Streuquerschnitt $\sigma(\theta) = a > 0$ gemessen worden. Bestimmen Sie die komplexe Streuamplitude $f(\theta)$. **(6 Punkte)**

Hinweis: Benutzen Sie das optische Theorem, um den Imaginärteil der Steuamplitude zu bestimmen.

[1] Man bezeichnet den Beitrag zu $l = 0$ als s-Streuung. Bei dieser Streuung können die Beiträge mit $l > 0$ zum Wirkungsquerschnitt vernachlässigt werden.

Stand 08. 07. 2016 um 11:19:24

(d) Für elastische Streuung eines sich in den z-Richtung bewegenden Teilchens der Masse m am Zentralpotential

$$U(\mathbf{r}) \; = \; \frac{\alpha}{r^2}\,, \quad \alpha \; > \; 0 \tag{2}$$

bestimmen Sie die Streuphasen δ_l und die Streuamplitude $f(\theta)$ unter der vereinfachenden Voraussetzung $\alpha \ll \hbar^2/2m$. **(8 Punkte)**

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die stationäre Schrödinger-Gleichung für dieses Potential umgeschriebem werden kann, als ob es kein Potential wäre. Für $r \to \infty$ *ist die asymptotische Lösung der Radialgleichung, die regulär an der Stelle* $r = 0$ *ist, annährend durch die Funktion* $\frac{1}{r}\, j_\gamma(kr) \sim \frac{1}{r}\, \sin(kr - \gamma\pi/2)$ *gegeben. Demzufolge sind die Streuphasen* δ_l *durch* $\frac{\pi}{2}(l - \gamma)$ *gegeben.*

(e) Bestimmen Sie in der Bornschen Nährung der totale Steuquerschnitt eines kugelsymmetrischen Potentialtopfes

$$U(\mathbf{r}) \; = \; \begin{cases} -U_0\,, & r \; < \; a\,, \\ 0\,, & r \; > \; a\,, \end{cases} \tag{3}$$

wobei $U_0 \; > \; 0$ gilt. Untersuchen Sie auch das Verhalten des Streuquerschnittes in den Grenzfällen $ka \ll 1$ und $ka \gg 1$. **(4 Punkte)**

Bemerkung: Die Bornsche Nährung ist zuverlässig genau dann, wenn das Steupotential untief ist, d.h. $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$ *gilt. Unter dieser Annahme lautet die Streuamplitude für ein Zentralpotential wie folgt*

$$f(\theta) \; = \; -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int\limits_0^{+\infty} U(r)\, \frac{\sin qr}{q}\, r dr\,, \quad \textit{wobei} \quad q \; = \; 2k \sin\frac{\theta}{2}\,. \tag{4}$$