Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN
MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUGBlatt 0
Besprechung 26.04.2017

Dieses Übungsblatt wird nicht bewertet und von den Tutoren beim ersten Tutorium vorgerechnet!

1. Skalarprodukt im ℓ^2 und $\mathcal{L}^2$

Das Skalarprodukt zweier Objekte $\psi, \chi \in \mathcal{V}$ des Vektorraums $\mathcal{V}$ ist eine Abbildung

$$\psi, \chi \in \mathcal{V} \rightarrow \langle \psi | \chi \rangle \in \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$):

- (Sesqui-)Linearität:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \lambda_1 \chi_1 + \lambda_2 \chi_2 \rangle &= \lambda_1 \langle \psi | \chi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \chi_2 \rangle \\ \langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \chi \rangle &= \lambda_1^* \langle \psi_1 | \chi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \chi \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

- Hermitizität:

$$\langle \psi | \chi \rangle = \langle \chi | \psi \rangle^* \quad (2)$$

- Positive Definitheit:

$$\langle \psi | \psi \rangle := \|\psi\|^2 \geq 0 \quad (3)$$

- (a) Betrachten wir zunächst den Vektorraum $\mathbb{C}^n$, also die Menge der n -dimensionalen komplexen Vektoren $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$. Zeige, dass die Definition

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle := \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i \quad (4)$$

die Eigenschaften (1)-(3) eines Skalarprodukts erfüllt wobei

$$A^\dagger = (A^T)^* \quad \mathbf{a}^\dagger = (\mathbf{a}^T)^* \quad (5)$$

- (b) Der Abschluss $n \rightarrow \infty$ von $\mathbb{C}^n$ definiert den Vektorraum der quadratisch summierbaren Zahlenfolgen

$$\ell^2 = \left\{ (a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} \quad (6)$$

Die Folgenglieder a_n definieren dann die Einträge $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^2$ eines unendlich dimensionalen, jedoch diskreten Vektors. Betrachte nun die Folgen

$$a_{n+1} = 1/\sqrt{n!} \quad b_n = 1/n \quad c_{n+1} = q^n \quad (0 < |q| < 1),$$

berechne jeweils das Normquadrat $\|\dots\|^2$ und zeige damit, dass die Folgen $a_n, b_n, c_n \in \ell^2$.

- (c) Seien nun $f(x), g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ komplexe quadratintegrale Funktionen (siehe Teilaufgabe (d) für deren Definition). Zeigen Sie, dass für diesen Funktionenraum ein Skalarprodukt durch

$$\langle f | g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x) \quad (7)$$

definiert werden kann, d.h. die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt sind.

- (d) Betrachte nun den Vektorraum der quadratintegralen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 < \infty \right\} \quad (8)$$

Zeige durch eine Entwicklung der Funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ in eine geeignete orthonormale und vollständige Basis ¹ $\{P_n\}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx P_n^*(x)P_m &= \delta_{n,m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(x')P_n(x) &= \delta(x-x') \end{aligned} \quad (9)$$

dass die Projektion des Funktionenraums $\mathcal{L}^2$ auf den Vektorraum ℓ^2 eine Isomorphie ist. Es genügt hierbei zu zeigen, wie die a_n durch $f(x)$ ausgedrückt werden können und dass gilt

$$\|f\|^2 < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

- (e) Zeigen Sie, dass für quadratintegrale Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\langle f | (i\nabla)g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \left(i \frac{d}{dx} g(x) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(i \frac{d}{dx} f(x) \right)^* g(x) =: \langle (i\nabla)f | g \rangle \quad (10)$$

2. Erwartungswerte einer gaussförmigen Wellenfunktion

Betrachte die Wellenfunktion ($\sigma > 0$):

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \quad (11)$$

- (a) Zeige, dass die Wellenfunktion normiert ist bzgl. der Norm des Skalarprodukts (7).
 (b) Berechne den Ortserwartungswert $\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \cdot |\psi(x)|^2$.
 (c) Berechne die Standardabweichung $\Delta X = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ der Wellenfunktion.
 (d) Berechne den mittleren Impuls des Teilchens ² $\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \partial_x \psi(x)$.
 (e) Berechne das Unschärfeprodukt $\Delta X \cdot \Delta P$ und zeige, dass ein Gausspaket minimal Unschärfe besitzt nach der Heisenberg'schen Unschärferelation $\Delta X \cdot \Delta P \geq \hbar/2$.

¹z.B. in eine Fourierreihe

²Für eine ebene Welle mit Impuls $p = \hbar k$ (k ist Wellenvektor) kann man sich leicht klar machen, dass der Operator $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x$ der Impulsoperator ist. Hier gilt nämlich mit $\psi(x) = c \cdot e^{ikx} = c \cdot e^{ipx/\hbar}$ dass

$$\langle \hat{p} \rangle = |c|^2 \int dx e^{-ipx/\hbar} \frac{\hbar}{i} \partial_x e^{ipx/\hbar} = p \cdot \int dx |\psi(x)|^2 = p$$

wobei wir ψ normiert hatten.