Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 1

Abgabe: 02.05.2017, 12:00h, Bespr.: 03.05.2017

---

1. Wellengleichung für ein freies relativistisches Teilchen (2 Punkte, mündlich)

Historisch leitete Erwin Schrödinger zunächst eine Wellengleichung für ein relativistisches Teilchen mit Masse m (auch bekannt als *Klein-Gordon-Gleichung*) her. Leiten Sie, ausgehend von der relativistischen Energie-Impuls Beziehung $E = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}$, eine solche relativistische Wellengleichung her. Motivieren und beschreiben Sie ihr Vorgehen.

2. Wellenfunktion im Potential (4 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen im Zustand ψ der von folgender Wellenfunktion im Ortsraum beschrieben wird:

$$\psi(x) = \frac{A\,e^{ikx}}{\cosh(\frac{x}{d})} \tag{1}$$

wobei $d, k \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Normierunskonstante A.

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ und $\langle \hat{p}^2 \rangle$ wobei der Impulsoperator in der Ortsbasis gegeben ist als $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$.

(c) Prüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2}$$

wobei die Standardabweichung für einen beliebigen Operator $\hat{\mathcal{O}}$ definiert ist als $\Delta\mathcal{O} := \sqrt{\langle \hat{\mathcal{O}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle^2}$.

(d) Finde Sie das Potential $V(x)$ für welches der Zustand ψ mit $k = 0$ eine Eigenfunktion der entsprechenden stationären Schrödingergleichung ist. Die stationäre Schrödingergleichung ist gegeben durch

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \tag{3}$$

Bestimmen Sie zusätzlich die Energie E des Zustands ψ. Handelt es sich hierbei um einen freien oder gebundenen Zustand?

Nützliche Integrale siehe z.B. auch *Table of integrals, series, and products ; I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik ; Daniel Zwillinger, 2015* erhältlich in der Uni-Bib.

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{\cosh^2(x)} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{\tanh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{3}$$

3. Drehimpuls im Zentralpotential (4 Punkte, mündlich)

In der Quantenmechanik werden physikalische Observablen durch selbstadjungierte Operatoren repräsentiert. Operatoren besitzen die Eigenschaft, dass diese, wie z.B. auch Differentialoperatoren und Matrizen, im Allgemeinen nicht kommutieren $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$.

Dieser Eigenschaft kommt in der Quantenmechanik eine besondere Bedeutung zu, welche aber nicht Bestandteil dieser Aufgabe ist. In dieser Aufgabe soll der Umgang mit Kommutatoren geübt werden.

(a) Berechnen Sie den Kommutator des Ort- $\hat{\mathbf{x}}$ und Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ und zeigen Sie, dass die konische Kommutatorrelation

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

gilt. Lassen Sie dazu den Kommutator auf eine Testfunktion $f = f(\mathbf{x})$ wirken.

(b) Zeigen Sie die Kommutatoridentitäten

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \tag{5}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} \tag{6}$$

(c) Berechnen Sie den Kommutator

$$[\hat{L}_i, \hat{V}] \tag{7}$$

des Drehimpulsoperators $\hat{L}_i = (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}})_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$ mit dem Potentialterm eine Zentralpotentials, hier $\hat{V} = \frac{k}{2}\hat{\mathbf{x}}^2$. Interpretieren Sie das Ergebnis.