Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17**

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

**Blatt 1 (Lösung)**
**Abgabe: 02.05.2017, 12:00h, Bespr.: 03.05.2017**

---

**1. Wellengleichung für ein freies relativistisches Teilchen (2 Punkte, mündlich)**

Die Lösung dieser Aufgabe folgt dem Vorgehen zur Herleitung der Schrödingergleichung, das im Skript zur Vorlesung beschrieben ist.

Durch ein Quadrieren der relativistischen Energie-Impuls Beziehung erhält man folgende Gleichung

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2, \tag{1}$$

die als Basis zur Herleitung dient. Wir möchten nun eine Wellengleichung der Form

$$A\,\frac{\partial^n \psi(x,t)}{\partial t^n} + B\,\psi(x,t) = C\,\frac{\partial^m \psi(x,t)}{\partial x^m} \tag{2}$$

finden, welche wellenartige Lösungen der Form

$$\psi(x,t) \propto \exp\left(ikx - i\omega t\right) \tag{3}$$

besitzt. Zudem sollen der Wellenvektor $k$ und die Frequenz $\omega$ die de Broglie Relationen

$$p = \hbar k \quad \text{and} \quad E = \hbar\omega \tag{4}$$

erfüllen. Einsetzen der Wellenfunktion Gl. 3 in Gl. 2 und unter Verwendung von Gl. 4 führt zu

$$A\left(-i\omega\right)^n + B = C\left(ik\right)^m \quad \xrightarrow{(4)} \quad A(-iE/\hbar)^n + B = C(ip/\hbar)^m \tag{5}$$

Durch Vergleich mit Gl. 1 setzen wir $n = m = 2$ wodurch

$$-A(E/\hbar)^2 + B = -C(p/\hbar)^2 \qquad \to \qquad E^2 = \hbar^2\frac{B}{A} + \frac{C}{A}p^2 \tag{6}$$

Der Vergleich mit Gl. 4 liefert uns

$$\begin{aligned} m^2c^4 &= \hbar^2\frac{B}{A} \\ c^2 &= \frac{C}{A} \end{aligned} \tag{7}$$

Wir wählen nun $C = 1$ (da die Wellenfunktion nur bis auf eine multiplikative Konstante definiert ist) und finden somit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{c^2} \\ B &= \frac{m^2c^4A}{\hbar^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Unsere relativistische Wellengleichung lautet also

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi\left(x,t\right)}{\partial t^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi\left(x,t\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\left(x,t\right), \tag{9}$$

welche auch Klein-Gordon Gleichung genannt wird.

2. **Wellenfunktion im Potential (4 Punkte, schriftlich)**

(a) (1 Punkt) Aus der Normierungsbedingung der Wellenfunktion lässt sich eine mögliche Normierung $A$ bestimmen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\psi(x) = 1 \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{\cosh^2(\frac{x}{d})} = |A|^2 2d \tag{11}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2d}} \tag{12}$$

(b) (1 Punkt) Fuer den Erwartungswert von $\hat{x}$ folgt aus der Symmetrie der Wellenfunktion

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\, x\, \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2\, x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{A^2}{\cosh^2(\frac{x}{d})} x = 0 \tag{13}$$

Fuer den Erwartungswert von $\hat{x}^2$ folgt

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x) x^2 \psi(x) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{x^2}{\cosh^2(\frac{x}{d})} = \frac{\pi^2}{12} d^2 \tag{14}$$

Fuer den Erwartungswert von $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ findet man

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)\right) = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x) \left(ik - \frac{\tanh(\frac{x}{d})}{d}\right)\psi(x) = \hbar k \tag{15}$$

wobei wiederum verwendet wurde, dass $|\psi|^2$ und $\tanh(x)$ eine jeweils symmetrische und antisymmetrische Funktion von $x$ sind.

Fuer den Erwartungswert von $\langle \hat{p}^2 \rangle$ folgt

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)\right)^* \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)\right) \tag{16}$$

$$= \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x) \left(-ik - \frac{\tanh(\frac{x}{d})}{d}\right)\left(ik - \frac{\tanh(\frac{x}{d})}{d}\right)\psi(x) \tag{17}$$

$$= \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\psi(x) \left(k^2 + \frac{\tanh^2(\frac{x}{d})}{d^2}\right) \tag{18}$$

$$= \hbar^2 \left(k^2 + \frac{1}{3d^2}\right) \tag{19}$$

(c) (1 Punkt) Fuer die Standardabweichung ergeben sich

$$\langle \Delta\hat{x} \rangle = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle} = \frac{\pi d}{2\sqrt{3}} \tag{20}$$

$$\langle \Delta\hat{p} \rangle = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{3}d} \tag{21}$$

Daraus folgt für die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\langle \Delta\hat{x} \rangle \langle \Delta\hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{\pi}{3} > \frac{\hbar}{2}, \tag{22}$$

die somit erfüllt ist.

(d) (1 Punkt) Die Schrödingergleichung in einer räumlichen Dimension ist gegeben durch

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) \tag{23}$$

Da das externe Potential $V$ keine Zeitabhängigkeit aufweist, lässt sich durch einen Separationsansatz $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ die stationäre Schrödingergleichung herleiten

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \tag{24}$$

Zur Bestimmung des Potentials $V$ und der Energie $E$ des Zustands setzen wir $\psi(x)$ fuer $k = 0$ in die stationaere SG ein

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) && (25)\\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{d}\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(\frac{x}{d}\right)\psi(x)\right) + V(x)\psi(x) && (26)\\
&= \frac{\hbar^2}{2md^2}\left(\frac{1}{\cosh^2(\frac{x}{d})} - \tanh^2\left(\frac{x}{d}\right)\right)\psi(x) + V(x)\psi(x) && (27)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2md^2}\psi(x) + \left(\frac{\hbar^2}{md^2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{x}{d})} + V(x)\right)\psi(x) && (28)\\
&= E\psi(x) && (29)
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\tanh^2(x) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(x)}$ gilt. Daraus laesst sich ablesen, dass

$$\begin{aligned}
V(x) &= -\frac{\hbar^2}{md^2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{x}{d})} && (30)\\
E &= -\frac{\hbar^2}{2md^2} && (31)
\end{aligned}$$

Da $E < 0$, handelt es sich um einen gebunden Zustand.

## 3. Drehimpuls im Zentralpotential (4 Punkte, mündlich)

(a) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_i, \hat{p}_j]f(\mathbf{x}) &= [x_i, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}]f(\mathbf{x}) && (32)\\
&= \frac{\hbar}{i}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}f(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i f(\mathbf{x}))\right) && (33)\\
&= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f(\mathbf{x}) - \delta_{ij}f(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_j}f(\mathbf{x})\right) && (34)\\
&= i\hbar\delta_{ij}f(\mathbf{x}) && (35)
\end{aligned}$$

Somit lautet das Resultat

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{36}$$

(b) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} && (37)\\
&= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} && (38)\\
&= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} && (39)
\end{aligned}$$

Die zweite Identität lässt sich analog zeigen.

(c) (2 Punkte) Unter Verwendung der oben hergeleiteten Eigenschaften ergibt sich

$$\left[\hat{L}_i, \hat{V}\right] = \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left[\hat{x}_j \hat{p}_k, \hat{x}_l^2\right] \tag{40}$$

$$= \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\hat{x}_l \left[\hat{x}_j \hat{p}_k, \hat{x}_l\right] + \left[\hat{x}_j \hat{p}_k, \hat{x}_l\right] \hat{x}_l\right) \tag{41}$$

$$= \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\hat{x}_l \hat{x}_j \left[\hat{p}_k, \hat{x}_l\right] + \hat{x}_j \left[\hat{p}_k, \hat{x}_l\right] \hat{x}_l\right) \tag{42}$$

$$= \frac{2\hbar}{i} \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{ijk} \delta_{kl} \hat{x}_l \hat{x}_j \tag{43}$$

$$= \frac{2\hbar}{i} \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{x}_k \hat{x}_j \tag{44}$$

$$= 0 \tag{45}$$

wobei die Summe auf Grund des antisymmetrischen Levi-Civita Tensors verschwindet.

Vorschläge zur Interpretation (Die Konzepte wurden eventuell noch nicht in der Vorlesung besprochen, können zur Motivation aber trotzdem kurz erläutert werden):

Aus der klassischen Mechanik sollte bekannt sein, dass der Drehimpuls eines Teilchens in einem Zentralpotential erhalten ist.

Ein ähnliches Resultat erhält man in der QM, wenn man die zeitliche Änderung des Erwartungswertes mit Hilfe des Ehrenfest-Theorems betrachtet. Für den Erwartungswert des Drehimpulses gilt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\mathbf{L}}(t) \rangle = \langle [\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}] \rangle = 0, \tag{46}$$

der somit erhalten ist. Dass der Drehimpuls ebenfalls mit dem kinetischen Term des Hamiltonoperators $\hat{T} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$ vertauscht und somit $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}] = 0$ gilt, sollte aus der obigen Rechnung ebenfalls hervorgehen, da der Impuls die kanonisch konjugierte Größ zum Ort ist.

Des weiteren ist der Drehimpulsoperator der Generator von Rotationen, welche in der QM durch unitäre Transformation ausgedrückt werden. Zum Beispiel gilt für die Rotation um einen Winkel $\varphi$ um Achse $i$

$$\hat{U}_i(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar} \varphi \hat{L}_i} \tag{47}$$

Da $[\hat{\mathbf{L}}, H] = 0$, ist der Hamiltonoperator, und somit auch das betrachtete physikalische System, invariant unter Rotationen, bzw. rotationssymmetrisch

$$\hat{H}' = \hat{U}_i(\varphi) \hat{H} \hat{U}_i^\dagger(\varphi) = \hat{H} \tag{48}$$