Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 2
Abgabe: 08.05.2017, 12:00h, Bespr.: 10.05.2017

---

1. Wellenpacket und Kontinuitätsgleichung (6,5 Punkte schriftlich)

In Aufgabe 2 auf Blatt 0 haben Sie sich bereits mit dem zeitunabhängigen Gauss'schen Wellenpaket $\psi(x,0)$ vertraut gemacht. Nun beschäftigen wir uns mit der zeitabhängigen Wellenfunktion der Form ($\sigma > 0$)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\sigma(1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})}} \exp\Big(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2(1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})}\Big) . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zu allen Zeiten auf 1 normiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ die Schrödingergleichung eines **freien** Teilchens erfüllt.

(c) Berechnen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle_t$ und $\langle \hat{p} \rangle_t$, die zugehörigen Standardabweichungen $\Delta X(t)$ und $\Delta P(t)$, sowie das Unschärfeprodukt $\Delta X(t) \cdot \Delta P(t)$.

(d) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ zu verschiedenen Zeitpunkten $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$, wobei $\tau = \frac{2m\sigma^2}{\hbar}$.

(e) Zeigen Sie schließlich, dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \nabla \mathbf{j}\,(x,t) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im}\big[\psi^*(x,t)\nabla\psi(x,t) - (\nabla\psi(x,t)^*)\psi(x,t)\big] \tag{2}$$

erfüllt.

Nützliches Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \text{ für } \mathrm{Re}\,(c) > 0. \tag{3}$$

2. Rechnen mit Operatoren (3 Punkte, mündlich)

In dieser Aufgabe wollen wir ein paar nützliche Operatoridentitäten zeigen.

(a) Beweise die Identität ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$)

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-1-m} . \tag{4}$$

Tipp: Vollständige Induktion.

(b) Zeige, dass für $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] . \tag{5}$$

(c) Nutze das Cauchy-Produkt um zu zeigen dass gilt

$$e^{\hat{A}} e^{-\hat{A}} = \mathbb{1} , \tag{6}$$

wobei $e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n / n!$.

3. Ehrenfest Theorem (2,5 Punkte, mündlich)

Betrachte ein Teilchen im eindimensionalen Potential

$$V(\hat{x}) = \lambda \hat{x}^n \qquad n \in \mathbb{N} \,. \tag{7}$$

(a) Berechne die zeitliche Änderung $\partial_t \langle \hat{x} \rangle_t$ und $\partial_t \langle \hat{p} \rangle_t$ im Potential $V(\hat{x})$.

(b) Bestimme die klassische Bewegungsgleichung eines Teilchens im Potential $V(x)$, und vergleiche mit dem quantenmechanischen Pendant. Für welche Potentiale stimmen beide Bewegungsgleichungen überein ?
Tipp: Der klassische Ort $x(t)$ entspricht dem quantenmechanischen Erwartungswert $\langle x \rangle_t$.