Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 2 (Lösung)
Abgabe: 08.05.2017, 12:00h, Bespr.: 10.05.2017

---

1. Wellenpaket und Kontinuitätsgleichung (6,5 Punkte, schriftlich)

Gegeben ist ein zeitabhängiges eindimensionales Gauss'sches Wellenpaket, das wir schreiben als

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{\sigma(1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2(1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})}\right)\\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\beta_t}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\beta_t^2}\right)\ ,\end{aligned}$$

wobei $\beta_t = \sigma\sqrt{1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2}}$. Außerdem verwenden wir die Abkürzung $\gamma_t = \sigma\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma^4}}$. (Damit ergibt sich $|\beta_t|^2 = \gamma_t\sigma$ und $|\beta_t^2|^2 = \gamma_t^2\sigma^2$.) Um ums das Leben später möglichst einfach zu machen, berechen wir direkt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned}\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \psi(x,t)\psi^*(x,t) &= \frac{\sigma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{|\beta_t|^2}\exp\Big[-\frac{(x-x_0)^2}{4}\underbrace{\left(\frac{1}{\beta_t^2}+\frac{1}{(\beta_t^2)^*}\right)}_{2/\gamma_t^2}\Big]\\ &= \frac{1}{\gamma_t\sqrt{2\pi}}\exp\Big[-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma_t^2}\Big] \qquad (1)\end{aligned}$$

Die Integrale, die wir benötigen werden lauten

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad = \quad \sqrt{2\pi} \qquad \text{für } n = \{0,2\}\ . \qquad (2)$$

(a) (1 Punkt) Damit lässt sich die Normierung leicht berechnen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x,t)|^2 &= \frac{1}{\gamma_t\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\exp\Big[-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma_t^2}\Big]\\ &= \left|\begin{array}{c} y=\frac{x-x_0}{\gamma_t}\\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\gamma_t}\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\exp\Big[-\frac{y^2}{2}\Big] \overset{(2)}{=} 1\ .\end{aligned}$$

(b) (1 Punkt) Hier setzen wir die Wellenfunktion in der SchrödingerGleichung eines freien Teilchens ein. Da wir die Ableitungen später noch benötigen werden, berechnen wir hier gleich alle notwendigen

$$\partial_x\psi(x,t) = -\frac{(x-x_0)}{2\beta_t^2}\,\psi(x,t) \qquad (3)$$

$$\partial_x\psi^*(x,t) = -\frac{(x-x_0)}{2(\beta_t^2)^*}\,\psi^*(x,t) \qquad (4)$$

$$\partial_x^2\psi(x,t) = \left[\frac{(x-x_0)^2}{4\beta_t^4} - \frac{1}{2\beta_t^2}\right]\psi(x,t) \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\partial_t\psi(x,t) &= \left[-\frac{1}{\beta_t}\frac{\sigma^2}{2\beta_t}\frac{i\hbar}{2m\sigma^2} + \frac{2(x-x_0)^2}{4\beta_t^3}\frac{\sigma^2}{2\beta_t}\frac{i\hbar}{2m\sigma^2}\right]\psi(x,t) \qquad (6)\\ &= \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{(x-x_0)^2}{4\beta_t^4} - \frac{1}{2\beta_t^2}\right]\psi(x,t) \qquad (7)\end{aligned}$$

Wollen wir nun zeigen, dass die Wellenfunktion die SG löst, setzen wir (5) und (7) ein, und sehen sofort

$$\begin{aligned}\hat{H}\,\psi(x,t) &= i\hbar\partial_t\psi(x,t)\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) &= i\hbar\partial_t\psi(x,t)\;,\end{aligned}$$

dass die Gleichung gelöst wird.

(c) (2 Punkte) Hier werden Erw.werte von $\hat{x}$ und $\hat{p}$, zusammen mit deren Standardabweichungen bestimmt. In jedem Integral werden wir die Substitution $\left| \begin{array}{c} y = \frac{x-x_0}{\gamma_t} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\gamma_t} \end{array} \right|$ durchführen ($\tilde{t} = \frac{t}{\tau} = \frac{\hbar t}{2m\sigma^2}$).

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\,|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,(\underbrace{\gamma_t y}_{\to 0}+x_0)\,e^{-\frac{y^2}{2}} = x_0\\
\langle\hat{x}^2\rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\,|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,(\gamma_t^2 y^2 + \underbrace{2x_0\gamma_t y}_{\to 0}+x_0^2)\,e^{-\frac{y^2}{2}} = \gamma_t^2 + x_0^2\\
\Delta X(t) &= \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_t - \langle\hat{x}\rangle_t^2} = \gamma_t = \sigma\,\sqrt{1+\tilde{t}^2}\\
\langle\hat{p}\rangle_t &\overset{(3)}{=} \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{-(x-x_0)}{2\beta_t^2}\,|\psi(x,t)|^2 = \frac{-\hbar\gamma_t}{i2\beta_t^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,y\,e^{-\frac{y^2}{2}} = 0\\
\langle\hat{p}^2\rangle_t &\overset{(5)}{=} -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left(\frac{(x-x_0)^2}{4\beta_t^4} - \frac{1}{2\beta_t^2}\right)|\psi(x,t)|^2 = \frac{\hbar^2}{2\beta_t^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\left(1-\frac{\gamma_t^2 y^2}{2\beta_t^2}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}\\
&\overset{(2)}{=} \frac{\hbar^2}{2\beta_t^2}\,\underbrace{(1-\frac{\gamma_t^2}{2\beta_t^2})}_{\beta_t^2/(2\sigma^2)} = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}\\
\Delta P(t) &= \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_t - \langle\hat{p}\rangle_t^2} = \frac{\hbar}{2\sigma}\\
\Delta X(t)\cdot\Delta P(t) &= \frac{\hbar}{2\sigma}\gamma_t = \frac{\hbar}{2}\,\sqrt{1+\tilde{t}^2}\;\geq \frac{\hbar}{2}\;.
\end{aligned}$$

Um die letzte Umformung bei $\langle\hat{p}^2\rangle_t$ zu sehen, setzt man am besten die verwendeten Abkürzungen ein, $1-\frac{\gamma_t^2}{2\beta_t^2} = 1-\frac{(\beta_t^2)^*\gamma_t^2}{2|\beta_t^2|^2} = 1-\frac{(\beta_t^2)^*}{2\sigma^2} = \frac{\beta_t^2}{2\sigma^2}$. Wir sehen also, dass das Wellenpaket die minimale Unschärfe nur zum Zeitpunkt $t=0$ hat.

(d) (1 Punkt) Als nächstes skizzieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ zu verschiedenen Zeiten $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ mit $\tau = \frac{2m\sigma^2}{\hbar}$ (siehe Abb. 1). Anhand der Standardabweichung $\Delta X(t) = \sigma\,\sqrt{1+\tilde{t}^2}$ sehen wir, dass das Wellenpaket zerfließt; und zwar für Zeiten $t<\tau$ relativ gemächlich, und für Zeiten $t>\tau$ deutlich schneller.

(e) (1,5 Punkte)

Nun zeigen wir noch, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Dazu berechnen wir zunächst den Strom und dessen räumliche Ableitung

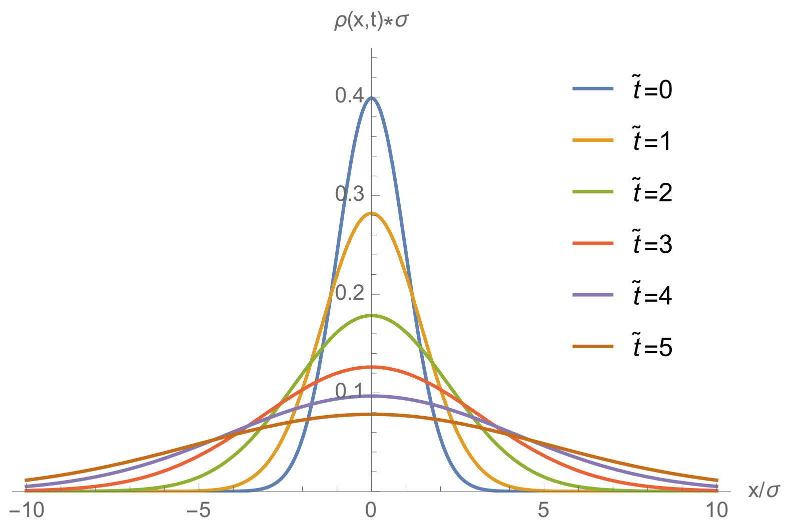

Abbildung 1: zerfließendes Wellenpaket ($x_0 = 0$)

$$
\begin{aligned}
j_x &= \frac{\hbar}{2im}\left[\psi(x,t)^*\partial_x\psi(x,t) - (\partial_x\psi(x,t)^*)\psi(x,t)\right] \\
&\overset{(3,4)}{=} \frac{\hbar}{2im}\,\frac{-(x-x_0)}{2}\,|\psi(x,t)|^2\,\underbrace{\left[\frac{1}{\beta_t^2} - \frac{1}{(\beta_t^2)^*}\right]}_{-2i\,\tilde{t}/\gamma_t^2} = \frac{\hbar\tilde{t}}{m\gamma_t^2}\,\frac{(x-x_0)}{2}\,|\psi(x,t)|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_x j_x &\overset{(3,4)}{=} \frac{\hbar\tilde{t}}{m\gamma_t^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{(x-x_0)}{2}\left(-\frac{(x-x_0)}{2}\right)\underbrace{\left\{\frac{1}{\beta_t^2} + \frac{1}{(\beta_t^2)^*}\right\}}_{2/\gamma_t^2}\right]|\psi(x,t)|^2 \\
&= \frac{\hbar\tilde{t}}{2m\gamma_t^2}\left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{\gamma_t^2}\right]|\psi(x,t)|^2\ .
\end{aligned}
$$

Nun berechnen wir die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte (1)

$$
\begin{aligned}
\partial_t|\psi(x,t)|^2 &\overset{(1)}{=} \left[-\frac{1}{\gamma_t^2} + \frac{1}{\gamma_t}\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2}\right)\frac{-2}{\gamma_t^3}\right]\frac{\partial\gamma_t}{\partial t}\,\gamma_t\,|\psi(x,t)|^2 \\
&= \frac{\hbar\tilde{t}}{2m\gamma_t^2}\left[-1 + \frac{(x-x_0)^2}{\gamma_t^2}\right]|\psi(x,t)|^2 = -\partial_x j_x\ .
\end{aligned}
$$

Hier haben wir verwendet $\frac{\partial\gamma_t}{\partial t} = \frac{\hbar\tilde{t}}{2m\gamma_t}$.

2. Rechnen mit Operatoren (3 Punkte, mündlich)

(a) (1 Punkt) Wir beweisen

$$
[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{B}^m[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1-m} \qquad ,n \geq 1 \tag{8}
$$

mit Hilfe von vollständiger Induktion:

- **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ gilt

$$
[\hat{A}, \hat{B}] = \sum_{m=0}^{0} \hat{B}^m[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{-m} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad \checkmark \tag{9}
$$

- **Induktionsvermutung:** Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte (8).
- **Induktionsschritt:** Betrachte $n \to n+1$

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}^{n+1}] &= \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}^n] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^n \overset{(8)}{=} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{B}^{m+1}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1-m} + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^n \\
&= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^n + \sum_{m=1}^{n} \hat{B}^m[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \hat{B}^m[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-m} \quad \checkmark
\end{aligned} \tag{10}
$$

(b) (1 Punkt) Gilt $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ so folgt aus (8)

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}^n] &= \sum_{m=0}^{n-1} \hat{B}^m[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1-m} = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{B}^m\hat{B}^{n-1-m}[\hat{A}, \hat{B}] \\
&= \hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] \sum_{m=0}^{n-1} = n \cdot \hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]
\end{aligned} \tag{11}
$$

(c) (1 Punkt) Berechne

$$
e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}} = \left(\sum_{n_0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}\right)\left(\sum_{m_0}^{\infty} \frac{(-\hat{A})^m}{m!}\right) \tag{12}
$$

Mit Hilfe des Cauchy-Produkts

$$
\left(\sum_{n_0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m_0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \tag{13}
$$

folgt

$$
e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{\hat{A}^m}{m!}\frac{(-\hat{A})^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m(-\hat{A})^{n-m}}_{[\hat{A}+(-\hat{A})]^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!} = 1 \tag{14}
$$

wobei wir am Ende den binomischen Lehrsatz verwendet haben.

3. Ehrenfest Theorem (2,5 Punkte mündlich)

Nutze die Schrödingergleichung und die konjugierte Schrödingergleichung[1]

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi(x,t) &= \hat{H}\psi(x,t) \\
-i\hbar\partial_t\psi^*(x,t) &= \psi^*(x,t)\hat{H}
\end{aligned} \tag{15}
$$

um die Änderung eines Erwartungswerts zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\langle\, \hat{A}\,\rangle_t &= \int dx\, \partial_t[\psi^*(x,t)\hat{A}\,\psi(x,t)] = \int dx\, dx \frac{i}{\hbar}\Big[\psi^*(x,t)H\hat{A}\psi(x,t) - \psi^*(x,t)\hat{A}\hat{H}\psi(x,t)\Big] \\
&= \int dx\, \psi^*(x,t)\frac{1}{i\hbar}\big[\hat{A}, \hat{H}\big]\psi(x,t) = \frac{1}{i\hbar}\langle\, [\hat{A}, \hat{H}]\,\rangle_t
\end{aligned} \tag{16}
$$

(a) (2 Punkte) Wir betrachten den HamiltonOperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda\hat{x}^n$, und berechnen die Kommutatoren

$$
[\hat{x}, \hat{H}] = [\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda\hat{x}^n] = \frac{1}{2m}[\hat{x}, \hat{p}^2] = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}]}_{i\hbar} + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p}\right) = \frac{i\hbar}{m}\hat{p} \tag{17}
$$

$$
\big[\hat{p}, \hat{H}\big] = \lambda[\hat{p}, \hat{x}^n] \overset{A.2}{=} \lambda\sum_{m=0}^{n-1} \hat{x}^m \underbrace{[\hat{p}, \hat{x}]}_{-i\hbar} \hat{x}^{n-1-m} = -i\hbar\lambda\, \hat{x}^{n-1}\, n\ . \tag{18}
$$

[1] Beachte hierbei dass $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ hermitesch ist und die Wirkung des Hamiltonoperators nach links und rechts die selbe ist.

Damit erhalten wir also für die zeitliche Änderung der Erwartungswerte

$$\partial_t \langle \hat{x} \rangle_t = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle_t \tag{19}$$

$$\partial_t \langle \hat{p} \rangle_t = -n\lambda \langle \hat{x}^{n-1} \rangle_t \tag{20}$$

bzw.

$$m\,\partial_t^2 \langle \hat{x} \rangle_t = -n\lambda \langle \hat{x}^{n-1} \rangle_t \tag{21}$$

$$= -n\lambda \left[\langle \hat{x} \rangle_t^{n-1} + \underbrace{(\langle \hat{x}^{n-1} \rangle_t - \langle \hat{x} \rangle_t^{n-1})}_{\equiv \Delta x^{(n-1)}} \right] \tag{22}$$

(b) (0,5 Punkte) Die klassischen Bewegungsgleichungen für das Potential $V(x) = \lambda x^n$ lauten

$$m\,\ddot{x} = F_x = -\partial_x V(x) = -n\lambda\, x^{n-1} \; . \tag{23}$$

Der klass. Ort entspricht dem qm. Erw.wert des Ortsoperators, also $x(t) = \langle x \rangle_t$. Damit stimmen die klass. und die qm. Bew.gleichungen nur dann überein, wenn $\Delta x^{(n-1)} = 0$ in (22). Dies ist jedoch nur erfüllt für $n \leq 2$, und insbesondere ist es für den harmonischen Oszillator (n=2) erfüllt.

4. Zusatz zur Aufgabe 1

Falls ihr im Tutorium noch genuegend Zeit uebrig habt, (und Interesse seitens der Studenten besteht) waere es nett, wenn ihr noch zeigen koenntet wie man auf die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ in der ersten Aufgabe kommt. Hier die Herleitung dazu. (Manche Studenten werden das vielleicht schon gesehen haben, da es Teil der einer Aufgabe von vor 2 Jahren war.)

(a) Zunaechst suchen wir die Loesung der eindimensionalen freien Schr Gleichung.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \; . \tag{24}$$

Über den Produktansatz

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{25}$$

erhalten wir die stationäre Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\psi(x). \tag{26}$$

Die Eigenfunktionen dieser Gleichung sind $\psi(x) = Ae^{i\frac{px}{\hbar}}$ mit den Eigenwerten $E(p) = \frac{p^2}{2m}$. Die Wellenfunktionen sind also ebene Wellen (,die leider nicht normierbar sind)

$$\psi(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - E(p)t)}. \tag{27}$$

(b) Nun kommt der interessante und entscheidende Schritt. Wir gewichten die ebenen Wellen mit einem Gauss'verteilten Gewichtungsfunktion $g(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}}e^{-\frac{p^2}{4\sigma_0^2}}$, und erzeugen damit das Wellenpaket. Die Wellenfunktion im Ortsraum, als 'gewichtete Summe der einzelnen ebenen Wellen', ergibt sich zu

$$\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\; g(p)\; e^{\frac{i}{\hbar}(px - E(p)t)} \; . \tag{28}$$

Diese Wellenfunktion ist nun normierbar, und erfuellt weiterhin die SchrGleichung. Wir berechnen die Funktion explizit (mit der Abkuerzung $\frac{1}{\alpha^2} = (\frac{1}{\sigma_0^2} + i\frac{2t}{m\hbar})$)

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}} \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\; \exp\Big(-\frac{p^2}{4\sigma_0^2} + i\frac{px}{\hbar} - i\frac{E(p)t}{\hbar}\Big) \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}} \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\; \exp\Big(-\frac{p^2}{4\sigma_0^2} + i\frac{px}{\hbar} - i\frac{p^2 t}{2m\hbar}\Big) \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}} \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\; \exp\Big(-\frac{p^2}{4\alpha^2} + i\frac{px}{\hbar}\Big) \; .
\end{aligned}$$

Hier sehen wir, dass die Funktion $\psi(x,t)$ also die FourierTransformierte einer GaussFunktion ist. Zur Berechnung machen wir eine quadratische Ergaenzung

$$\frac{p^2}{4\alpha^2} - i\frac{px}{\hbar} = \Big(\frac{p^2}{4\alpha^2} - i\frac{px}{\hbar} - \frac{\alpha^2 x^2}{\hbar^2}\Big) + \frac{\alpha^2 x^2}{\hbar^2} = \Big(\frac{p}{2\alpha} - i\frac{\alpha x}{\hbar}\Big)^2 + \frac{\alpha^2 x^2}{\hbar^2} \ ,$$

und erhalten (mit dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-(x+i\alpha)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{\hbar^2}} \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} \ \exp\Big(-\big(\frac{p}{2\alpha} - i\frac{\alpha x}{\hbar}\big)^2\Big) \tag{30}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{1/4}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{2}{\hbar}}\ \alpha$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\sigma(1 + i\frac{\hbar t}{2ma^2})}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\sigma^2(1 + i\frac{\hbar t}{2ma^2})}\Big) \tag{31}$$

wobei wir genutzt haben $\sigma = \frac{\hbar}{2\sigma_0}$ und damit $\frac{\hbar^2}{\alpha^2} = \frac{\hbar^2}{\sigma_0^2}(1+i\frac{2\hbar t\sigma_0^2}{m\hbar^2}) = 4\sigma^2(1+i\frac{\hbar t}{2m\sigma^2})$ haben.

Also haben wir wieder eine Gauß-Kurve, wobei die Breite σ gerade invers-proportional zur Breite der Impulsverteilung σ_0 ist.