Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 3
Abgabe: 15.05.2017, 12:00h; Bespr.: 17.05.2017

---

1. Quiz Nr. 1, 10 Punkte

Das Aufgabenblatt wird zu Beginn des Tutoriums ausgeteilt. Die Bearbeitunszeit beträgt 30 Minuten. Das Verwenden von Formelsammlungen oder Notizen ist nicht erlaubt. Benötigte Formeln und Integrale sind, wenn erforderlich, angegeben.

2. Zeitabhängige Erwartungswerte für Wellenfunktionen im Potentialtopf (4 Punkte, schriftlich)

In dieser Aufgabe soll der Erwartungswert des Ortsoperators in Abhängigkeit der Zeit für eine Wellenfunktion $\psi(x,t)$ berechnet werden. Die Anfangswellenfunktion lässt sich hierzu als Superposition von Energieeigenzustände des Systems darstellen

$$\psi(x,0) = \sum_n b_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

mit Energieeigenwert E_n. Somit ist die Zeitentwicklung des Anfangszustands gegeben durch

$$\psi(x,t) = \sum_n b_n \varphi_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \tag{2}$$

Hierbei ist $\{\varphi_n\}$ ein vollständiger Satz orthonormierter Funktionen und die Entwicklungskoeffizienten b_n sind durch Projektion des Anfangszustands auf die Energieeigenfunktion bestimmt

$$b_n = \int dx\, \varphi_n^*(x)\psi(x,0). \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass der zeitabhängige Erwartungswert einer Observablen $\hat{A}$ gegeben ist durch

$$\langle \hat{A}\rangle(t) = 2\sum_{n<m} b_n^* b_m \langle n|\hat{A}|m\rangle \cos((\omega_n - \omega_m)\, t) + \sum_n |b_n|^2 \langle n|\hat{A}|n\rangle \tag{4}$$

Es kann angenommen werden, dass $\{b_n^* b_m\}$ and $\langle n|\hat{A}|m\rangle$ rein reell sind. Wie lautet der Ausdruck für die Matrixelemente $\langle n|\hat{A}|m\rangle$?

Betrachten Sie nun einen eindimensionalen Potentialtopf mit Breite a in dem sich ein Teilchen lediglich im Ortsbereich $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ bewegen kann. Energieeigenfunktionen und -werte sind aus der Vorlesung bekannt und gegeben durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(k_n x) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_n x) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{5}$$

mit $k_n = \frac{n\pi}{a}$ und

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 n^2}{a^2}. \tag{6}$$

Nehmen Sie an, dass die Anfangswellenfunktion gegeben ist durch

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(1 + \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right) \tag{7}$$

(b) Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten b_n.

(c) Bestimmen Sie die notwendigen Matrixelement $\langle n|\hat{x}|m\rangle$.

(d) Bestimmen Sie $\langle \hat{x}\rangle(t)$.

3. Rechnen mit Operatoren II (4 Punkte, mündlich)

$\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien hermitesche Operatoren: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ und $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist der Erwartungswert hermitescher Operatoren rein reell.

(a) (i) Zeigen Sie, dass $\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$ rein imaginär ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle$ rein reell ist, wobei der Antikommutator definiert ist als $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

(iii) Welche der folgenden Operatoren sind hermitisch?

1.) $\hat{A}\hat{B}\hat{A}$

2.) $i\,[\hat{A}, \hat{B}]$

3.) $e^{i\,\hat{A}}$

4.) $e^{i\,[\hat{A}, \hat{B}]}$

(b) Beweisen Sie die Identität

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \ldots \tag{8}$$

Hinweis: Entwickeln Sie $\hat{f}(\eta) \equiv e^{\eta\hat{A}}\hat{B}e^{-\eta\hat{A}}$ in einer Taylorreihe um $\eta = 0$. Zeigen Sie zunächst, dass $d\hat{f}/d\eta = [\hat{A}, \hat{f}]$.

(c) Zeige Sie, dass die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \tag{9}$$

gilt, wenn

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \tag{10}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Funktion $\hat{g}(\eta) \equiv e^{\eta\hat{A}}e^{\eta\hat{B}}e^{-\eta(\hat{A}+\hat{B})}$. Zeigen Sie, dass $[e^{\eta\hat{A}}, \hat{B}] = \eta e^{\eta\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]$ gilt. Diese Identität lässt sich mit Gl. 5 von Blatt 2 herleiten. Zeigen Sie dann, dass $\frac{d\hat{g}(\eta)}{d\eta} = \eta[\hat{A}, \hat{B}]\hat{g}(\eta)$. Finden Sie anschließend eine Lösung dieser Differentialgleichung.