Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN
MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUGBlatt 4
Abgabe: 22.05.2017, 12:00h, Bespr.: 24.05.2017**Vorbemerkung: Impulsdarstellung und Fouriertransformationen**

Die Ortsdarstellung der Impulseigenfunktionen (eindimensional)

$$\hat{p} | p \rangle = p | p \rangle \quad (1)$$

ist gegeben durch die Projektion auf den Bra $\langle x |$:

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar}{i} \partial_x \langle x | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar}{i} \partial_x \phi_p(x) = p \phi_p(x) \quad (2)$$

sodass:

$$\phi_p(x) = \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \quad (3)$$

Unter Ausnutzung der Orthonormalität und Vollständigkeit der Orts- und Impulseigenfunktionen $| x \rangle, | p \rangle$ (beachte, dass $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$ hermitesche Operatoren sind)

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') \quad \mathbb{1} = \int dx | x \rangle \langle x | \quad (4)$$

$$\langle p | p' \rangle = \delta(p - p') \quad \mathbb{1} = \int dp | p \rangle \langle p | \quad (5)$$

können wir nun einfach jeden Zustand $|\psi\rangle$ in Ortsdarstellung $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ in Impulsdarstellung $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$ umschreiben via

$$\psi(p) = \langle p | \psi \rangle = \int dx \underbrace{\langle p | x \rangle}_{=\langle x | p \rangle^* = \phi_p^*(x)} \underbrace{\langle x | \psi \rangle}_{\psi(x)} = \int dx \phi_p^*(x) \psi(x) \quad (6)$$

Eine analoge Rechnung vom Impuls- in die Ortsdarstellung liefert insgesamt:

$$\psi(p) = \int dx \phi_p^*(x) \psi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) \quad (7)$$

$$\psi(x) = \int dp \phi_p(x) \psi(p) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \psi(p) \quad (8)$$

Die Impuls- und Ortsdarstellung lassen sich also durch Fouriertransformationen (bis auf Faktoren von $\hbar$) ineinander überführen.

1. Impulsdarstellung und Fouriertransformationen (3,5 Punkte, schriftlich)

- (a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte und damit die Impulsdarstellung der Delta-Funktion $\delta(x)$. Zeigen Sie damit, dass gilt

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad (9)$$

- (b) Zeige Sie, dass die Fouriertransformierte einer Faltung im Ortsraum im Impulsraum durch ein Produkt schreiben lässt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \left[\int dx' f(x-x')g(x') \right] = \sqrt{2\pi\hbar} f(p)g(p) \quad (10)$$

- (c) Leiten Sie die Impulsdarstellung der Schrödingergleichung ausgehen von ihrer Darstellung im Ortsraum

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (11)$$

her. Fouriertransformieren Sie hierfür beide Seiten der Gleichung (11) via (7). Sie können hierbei nutzen, dass sich $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n$ in eine Potenzreihe entwickeln lassen soll.

- (d) Betrachten Sie nun ein konstantes Potential $V(x) = V_0$. Was sind die Eigenfunktionen $\psi(p)$ und die Dispersion E_p des Teilchens?

2. Freies Teilchen im homogenen Feld (2,5 Punkte, mündlich)

Ein homogenes Feld, das auf ein Teilchen wirkt, wird durch das Potential

$$V(X) = -F \cdot x \quad (12)$$

beschrieben. Die Schrödingergleichung für dieses System hat im Ortsraum die Form der Airy-Differentialgleichung

$$f''(x) - x \cdot f(x) = 0. \quad (13)$$

Im Impulsraum lässt sich die Lösung dieses Problems allerdings leichter finden.

- (a) Geben Sie die Impulsraumdarstellung für die Schrödingergleichung eines Teilchens in einem homogenen Feld an.
- (b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(p)$, die diese Differentialgleichung erster Ordnung löst,
- (c) Zeigen Sie, dass diese Lösung beim Wechsel zurück in den Ortsraum zu der impliziten Gleichung für die Airy-Funktion

$$A_i(\xi) = \int \frac{du}{\pi} \cos\left(\frac{u^3}{3} + \xi u\right) \quad (14)$$

führt.

3. Unschärfe in einer endlichen Dimension (4 Punkte, mündlich)

In der Vorlesung haben wir die Herleitung der allgemeinen Unschärferelation für hermitesche Operatoren kennengelernt. Man findet die Ungleichung¹

$$\langle(\Delta\hat{O})^2\rangle\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle\geq\frac{1}{4}\left|\langle[\hat{O},\hat{P}]\rangle\right|^2. \quad (15)$$

Typischerweise ergibt sich für das Unschärfeprodukt aus Ort und Impuls in einer (unendlich ausgedehnten) Dimension

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\geq\frac{\hbar^2}{4}.$$

In dieser Aufgabe wollen wir nun die Unschärfe aus Ort und Impuls in einer endlich ausgedehnten Dimension, $x \in [0, R]$, untersuchen, wobei wir periodische Randbedingungen, d.h. $\psi(x+R) = \psi(x)$, annehmen wollen.² Die Unschärfe des Impulses sollte sich weiterhin über den gesamten Impulsraum ausdehnen können, wohingegen die Unschärfe des Ortes nun auf ein endliches Intervall beschränkt sein sollte.

- (a) Lösen Sie zunächst die Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens und bestimmen Sie die Quantisierung der Energie durch die gewählten Randbedingungen.

Die Problematik in dieser Aufgabe liegt darin einen sinnvollen Ortsoperator $\hat{x}$ zu finden, dessen Eigenwerte auch nur im Bereich $x \in [0, R]$ zu finden sind. Dass der gewöhnliche Ortsoperator nicht sinnvoll ist, erkennt man durch Betrachtung der Wellenfunktion $\tilde{\psi}(x) = \hat{x}\psi(x)$. Diese Funktion erfüllt nicht mehr die periodischen Randbedingungen,

$$\tilde{\psi}(x+R) = (x+R)\underbrace{\psi(x+R)}_{\psi(x)} \neq x\psi(x) = \tilde{\psi}(x),$$

und kann damit nicht mehr Teil des Hilbertraumes erlaubter Wellenfunktionen sein. Wir schlagen deshalb zwei bessere Wahlen von Ortsoperatoren vor, nämlich

$$\hat{x}_1 = \hat{x} \bmod R, \quad (16)$$

$$\hat{x}_2 = e^{i\frac{2\pi}{R}\hat{x}} = \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)}_{\equiv \hat{x}_{2c}} + i \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)}_{\equiv \hat{x}_{2s}}. \quad (17)$$

Obwohl die Wahl des hermiteschen Operators $\hat{x}_1$ (16) sehr viel geeigneter erscheint, werden wir uns in dieser Aufgabe dem nicht-hermiteschen Operator³ $\hat{x}_2$ (17) zuwenden.

- (b) Zeigen Sie, dass für einen Operator $\hat{A}$ gilt: $\sin^2(\hat{A}) + \cos^2(\hat{A}) = \hat{I}$, wobei $\hat{I}$ der Identitätsoperator ist.
- (c) Berechnen Sie nun jeweils das Unschärfeprodukt (15) der hermiteschen Operatoren $\hat{x}_{2c}$ und $\hat{x}_{2s}$ mit dem Impulsoperator $\hat{p}$.
Führen Sie dann die Größe $\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle = \langle\Delta\hat{x}_2^\dagger\Delta\hat{x}_2\rangle$ ein, und zeigen Sie mittels der beiden Ungleichungen, dass gilt

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle\geq\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{2\pi}{R}\right)^2\left[1-\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle\right]. \quad (18)$$

Intepretieren Sie das Ergebnis.

- (d) Führen Sie schließlich in (18) den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ durch.

¹Die Ungleichung gilt auch *nur* für hermitesche Operatoren.

²Dieses Problem ist analog zu einem Teilchen auf einem Ring.

³Der franz. Physiker Lévy-Leblond hat einst ein Paper mit dem vielversprechenden Titel ‘Who is afraid of non-hermitian operators? A quantum description of angle and phase’ geschrieben. Also bleiben Sie entspannt. Referenz: ‘Lévy-Leblond, (1976), Annals of Physics, 101, p.319-341’