Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 4 (Lösung)
Abgabe: 22.05.2017, 12:00h, Bespr.: 24.05.2017

---

1. Impulsdarstellung und Fouriertransformationen (3,5 Punkte, schriftlich)

(a) (0,5 Punkte) Wir berechnen die Fouriertransformierte $\tilde{\delta}$ bzw. die Impulsdarstellung der $\delta(x)$ Funktion als

$$\tilde{\delta}_p = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,. \tag{1}$$

Beachte hier, die Fouriertransformierte einer delta-Funktion ist eine Konstante. Setzen wir diese Konstante in die Rücktransformation ein, erhalten wir

$$\delta(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}\tilde{\delta}_p = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ipx/\hbar} = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\,. \tag{2}$$

Falls ihr die Aufgabe 1,d) aus dem Ortsraum kommend nachrechnen wollt, benötigt ihr ebenso die Fouriertransformierte der $\delta(p)$ Funktion. Diese lautet analog

$$\tilde{\delta}_x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}\delta(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,, \tag{3}$$

und damit

$$\delta(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\tilde{\delta}_x = \int \frac{dx}{2\pi\hbar} e^{-ipx/\hbar} = \int \frac{d\tilde{x}}{2\pi} e^{-ip\tilde{x}}\,. \tag{4}$$

Darüberhinaus wurden wir darauf hingewiesen, dass die Fouriertansformation nur unter dem Integral definiert sei. Ähm... wir drücken hier beide Augen zu. ;)

(b) (1 Punkt) Betrachte

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\Big[\int \mathrm{d}x'\, f(x-x')g(x')\Big] \qquad (5)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\Big[\int \mathrm{d}x' \int \frac{dp'}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip'(x-x')/\hbar} f(p') \int \frac{dp''}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip''x'/\hbar} g(p'')\Big]\\
&= \int \frac{dp'dp''}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(p')g(p'') \underbrace{\int dx e^{i(p'-p)x/\hbar}}_{=2\pi\delta(\frac{p'-p}{\hbar})} \underbrace{\int dx' e^{i(p''-p')x'/\hbar}}_{=2\pi\delta(\frac{p''-p'}{\hbar})}\\
&= \int \frac{dp'dp''}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(p')g(p'')2\pi\hbar\delta(p'-p)2\pi\hbar\delta(p''-p') = \sqrt{2\pi\hbar} f(p)g(p) \qquad (6)
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben $\delta(a\cdot x) = 1/|a|\cdot\delta(x)$.

(c) (1 Punkt) Betrachte die Schrödingergleichung im Ortsraum

$$\big[-\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} + V(x)\big]\psi(x) = E\psi(x) \tag{7}$$

und transformiere diese in den Impulsraum durch die auf dem Übungsblatt angegebene Fouriertransformation

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\big[-\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} + V(x)\big]\psi(x) = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}E\psi(x)}_{E\psi(p)} \tag{8}$$

Wende nun zwei mal eine partielle Integration auf der linken Seite an

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi(x)\big[\underbrace{-\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m}}_{=p^2/2m}+V(x)\big]e^{-ipx/\hbar} = E\psi(p) \tag{9}$$

und schreibe $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi(x)\big[\frac{p^2}{2m}+\sum_{n=0}^{\infty} V_n \underbrace{x^n}_{(-\hbar/i\,\partial_p)^n}\big]e^{-ipx/\hbar} = E\psi(p) \tag{10}$$

$$\big[\frac{p^2}{2m}+\sum_{n=0}^{\infty} V_n(-\hbar/i\,\partial_p)^n\big]\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi(x)e^{-ipx/\hbar} = E\psi(p) \tag{11}$$

$$\big[\frac{p^2}{2m}+\sum_{n=0}^{\infty} V_n(-\hbar/i\,\partial_p)^n\big]\psi(p) = E\psi(p) \tag{12}$$

$$\big[\frac{p^2}{2m}+V(-\hbar/i\,\partial_p)\big]\psi(p) = E\psi(p) \tag{13}$$

(d) (1 Punkt) Für ein konstantes Potential $V(x) = V_0$ ist die Schrödingergleichung in Impulsdarstellung gerade

$$[\frac{p^2}{2m}+V(-\hbar/i\,\partial_p)]\psi(p) = E\psi(p) \tag{14}$$

$$[\frac{p^2}{2m}+V_0]\psi(p) = E\psi(p)\ . \tag{15}$$

Damit erhält man automatisch die Dispersionrelation $E_p = V_0 + \frac{p^2}{2m}$ eines freien Teilchens im Potential V_0. Um die Eigenfunktionen $\psi(p)$ zu finden, macht man sich am besten klar, dass auf der linken Seite mit $[\frac{p^2}{2m}+V_0]$ eine Funktion von p steht und rechts eine konstante E vor $\psi(p)$ zu finden ist. Die Gleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn $\psi(p) = \delta(p-p_0)$ mit $p_0 = \sqrt{2m(E-V_0)}$. Wer das nicht glaubt, kann das Problem natürlich auch einfach im Ortsraum lösen und Fourier transformieren.
Man beachte, dass die Funktionen $\psi(p) \propto \delta(p-p_0)$ nicht Teil des quadratintegrablen Hilbertraums sind; genauso wenig wie ihre Ortsraumdarstellungen $\psi(x) \propto e^{ip_0x/\hbar}$.

2. Freies Teilchen im homogenen Feld (2,5 Punkte, mündlich)

(a) (0,5 Punkte) Im Impulsraum ist die Schrödinger-Gleichung (nach (11)) gegeben durch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{p^2}{2m}\psi(p) - i\hbar F\frac{\mathrm{d}\psi(p)}{\mathrm{d}p} = E\psi(p). \tag{16}$$

(b) (1 Punkt) Diese Differentialgleichung läßt sich durch Trennung der Veränderlichen

$$-i\frac{1}{\psi}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{\hbar F}\Big(E-\frac{p^2}{2m}\Big)\,\mathrm{d}p \tag{17}$$

und Integration auf beiden Seiten

$$-i\log\Big(\frac{\psi(p)}{\psi_0}\Big) = \frac{1}{\hbar F}\Big(Ep-\frac{p^3}{6m}\Big) \tag{18}$$

lösen. Damit erhält man für die Wellenfunktion im Impulsraum

$$\psi(p) \propto \exp\Big(i\frac{E}{\hbar F}p - i\frac{p^3}{6m\hbar F}\Big). \tag{19}$$

(c) (1 Punkt) Wechselt man zurück in den Ortsraum

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} \psi(p) \tag{20}$$

erhält man das Integral

$$\psi(x) \propto \int \mathrm{d}p \exp\Big(i\Big[\frac{p}{\hbar}(x + \frac{E}{F}) - \frac{p^3}{6m\hbar F}\Big]\Big). \tag{21}$$

Betrachtet man die Gleichung sieht man zuerst, dass die Energie E nur als Verschiebung um $x_0 = -\frac{E}{F}$ eingeht. Dies ist gerade der klassische Umkehrpunkt, bei dem $E = V(x_0)$ gilt. Zum anderen erhalten wir eine Längenskala ℓ

$$\ell^3 = \frac{\hbar^2}{2m|F|} \tag{22}$$

$$\psi(x) \propto \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\Big(i\Big[\frac{p\ell}{\hbar}\frac{x - x_0}{\ell} - \mathrm{sign}(F)\frac{p^3\ell^3}{3\hbar^3}\Big]\Big). \tag{23}$$

Führen wir die dimensionslosen Variablen

$$\xi = (x - x_0)/\ell \quad \text{und} \quad u = p\ell/\hbar \tag{24}$$

ein benutzen die Eulersche Formel und berücksichtigen, dass $\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist erhalten wir damit

$$\psi(\xi) \propto \int \mathrm{d}u \cos\Big(\frac{u^3}{3} - \mathrm{sign}(F)\xi u\Big). \tag{25}$$

Dies ist gerade die implizite Gleichung für die Airy-Funktion, wobei

$$\psi(\xi) \propto A_i(-\mathrm{sign}(F)\xi). \tag{26}$$

Nebenbemerkung:
Setzt man die dimensionslosen Variablen ξ und u in die Schrödinger-Gleichung ein, erhält man ($\bar{\xi} = -\mathrm{sign}(F)\xi$) die Airy-Differentialgleichung

$$\psi''(\bar{\xi}) - \bar{\xi}\psi(\bar{\xi}) = 0. \tag{27}$$

Diese hat zwei linear unabhängige Lösungen, die Airy-Funktionen A_i und B_i (B_i divergiert für $x \to \infty$ und ist daher unphysikalisch.). In Abb. 1 sind die Wellenfunktion (27) und das effektive Potential $V^{eff} = \frac{x-x_0}{\ell}$ dargestellt. Die Wellenfunktion oszilliert für $\xi < 0$, d.h. negatives Potential, wie $\psi(\xi) \propto \frac{\sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}|\xi|^{1/4}}$, und sowie das Potential positiv wird, fällt die Wellenfunktion expontiell ab wie $\psi(\xi) \propto \frac{e^{-\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}}}{\sqrt{4\pi}|\xi|^{1/4}}$.

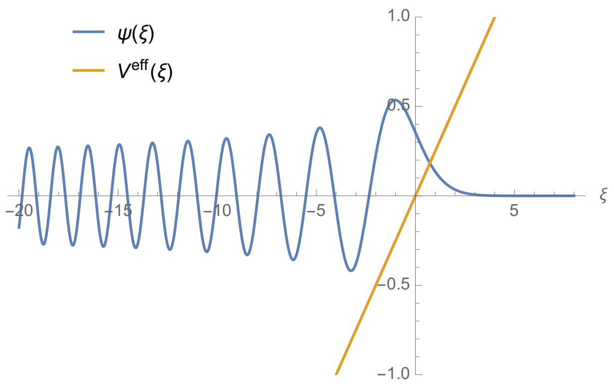

Abbildung 1: Airy-Funktionen

3. Unschärfe in einer endlichen Dimension (4 Punkte, mündlich)

(a) (1 Punkt)
Wir lösen zunächst die SchrödingerGleichung eines freien Teilchens $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x) = E\psi$, und finden direkt die allgemeine Lösung

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \,,$$

wobei $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Fordern wir nun dass die periodischen Randbedingungen erfuellt werden sollen, erhalten wir direkt die Quantisierung $\psi(x+R) = Ae^{ikR}e^{ikx} + Be^{-ikR}e^{-ikx} \stackrel{!}{=} \psi(x)$, $\to e^{\pm ikR} = 1$, $\to k_nR = 2\pi n$ für $n = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$. Fuer die Energie ergibt sich folglich $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mR^2}n^2$.

(b) (0,5 Punkte)
Die Identitaet $\sin^2(\hat{A}) + \cos^2(\hat{A}) = \hat{I}$ fuer den Operator $\hat{A}$ ist dank der Baker Hausdorff Formel ($e^{i\hat{A}}\,e^{-i\hat{A}} = \hat{I}$) leicht zu zeigen. Da wir $e^{i\hat{A}} = \cos\left(\hat{A}\right) + i\sin\left(\hat{A}\right)$ schreiben koennen, koennen wir ebenfalls $\cos\left(\hat{A}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\hat{A}} + e^{-i\hat{A}}\right)$, bzw. $\sin\left(\hat{A}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\hat{A}} - e^{-i\hat{A}}\right)$ schreiben.
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\cos^2(\hat{A}) + \sin^2(\hat{A}) =& \frac{1}{4}\left[\left(e^{i\hat{A}} + e^{-i\hat{A}}\right)^2 - \left(e^{i\hat{A}} - e^{-i\hat{A}}\right)^2\right] \\ =& \frac{1}{4}\,4\,e^{i\hat{A}}\,e^{-i\hat{A}} = \hat{I}\,.\end{aligned}$$

(c) (1,5 Punkte)
Wir benutzen den Operator $\hat{x}_2 = \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)}_{\equiv\hat{x}_{2c}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)}_{\equiv\hat{x}_{2s}}$ und berechnen jeweils das Unschärfeprodukt von $\hat{x}_{2c}$, $\hat{x}_{2s}$ mit dem Impulsoperator $\hat{p}$. Dafuer brauchen wir lediglich

$$\begin{aligned}\left[\hat{p}, \cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\right] =& -\frac{\hbar}{i}\frac{2\pi}{R}\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right) \\ \left[\hat{p}, \sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\right] =& \frac{\hbar}{i}\frac{2\pi}{R}\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\,,\end{aligned}$$

und erhalten die Ungleichungen (mit Gl. (15) des Aufgabenblattes)

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle\,\langle(\Delta\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right))^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{2\pi}{R}\right)^2\langle\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle^2 \tag{28}$$

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle\,\langle(\Delta\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right))^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{2\pi}{R}\right)^2\langle\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle^2. \tag{29}$$

Nun berechnen wir die Größe

$$\begin{aligned}\langle(\boldsymbol{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle =& \langle\Delta\hat{x}_2^\dagger\,\Delta\hat{x}_2\rangle = \langle\left(\hat{x}_2^\dagger - \langle\hat{x}_2\rangle^*\right)(\hat{x}_2 - \langle\hat{x}_2\rangle)\rangle \\ =& \langle\underbrace{\hat{x}_2^\dagger\hat{x}_2}_{e^{-i\frac{2\pi}{R}\hat{x}}e^{i\frac{2\pi}{R}\hat{x}}=\hat{I}}\rangle - \underbrace{\langle\hat{x}_2\rangle^*\langle\hat{x}_2\rangle}_{|\langle e^{i\frac{2\pi}{R}\hat{x}}\rangle|^2} = 1 - |\langle\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle + i\langle\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle|^2 \\ =& 1 - \langle\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle^2 - \langle\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle^2 \qquad (30) \\ =& \langle(\Delta\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right))^2\rangle + \langle(\Delta\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right))^2\rangle\,, \qquad (31)\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Umformung verwendet haben $1 = \langle \cos^2(\frac{2\pi}{R}\hat{x}) + \sin^2(\frac{2\pi}{R}\hat{x})\rangle$. Schließlich addieren wir die beiden Ungleichungen (29) und (29), und setzen (30)und (31) ein, und wir erhalten die gesuchte Ungleichung

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle \, \langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \left[1 - \langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle\right] \; . \tag{32}$$

Intepretation: Hier sehen wir, dass der Impuls scharf bestimmt werden kann ($\Delta\hat{p} = 0$), und der Ort dennoch nicht unendlich unbestimmt sein muss (wie bei einem freien Teilchen in einer unendlich ausgedehnten Dimension), sondern einen endlichen Wert der Unbestimmheit annimmt, nämlich $\langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle = 1$.

(d) (1 Punkt)
Nun führen wir den Grenzübergang $R \to \infty$ in (32) durch. Dazu entwickeln wir (30) bis zur quadratischen Ordnung in $\frac{1}{R}$, d.h.

$$\begin{aligned}
\langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle =& 1 - \langle\cos\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle^2 - \langle\sin\left(\frac{2\pi}{R}\hat{x}\right)\rangle^2 \\
\approx& 1 - \underbrace{\langle\hat{I} - \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{R}\,\hat{x})^2\rangle^2}_{\approx 1 - (\frac{2\pi}{R})^2\langle\hat{x}^2\rangle} - \langle\frac{2\pi}{R}\,\hat{x}\rangle^2 \\
=& (\frac{2\pi}{R})^2 \left[\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2\right] \\
=& (\frac{2\pi}{R})^2 \langle(\Delta\hat{x})^2\rangle \; .
\end{aligned}$$

Also finden wir $(\frac{R}{2\pi})^2\langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle \to \langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ und $\langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle \to 0$ und letztendlich erhalten wir angenehmerweise wieder die standard Unschärferelation

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle \, \langle(\Delta\hat{x})^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \; .$$

4. Zusatzinformation zu Aufgabe 3

(a) Dass $\langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle = 1$ tatsächlich gilt, kann man leicht nachrechnen. Dazu nehmen wir die allgemeine Wellenfunktion $\psi(x) = Ae^{ik_n x} + Be^{-ik_n x}$; berechnen damit den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\langle e^{i\frac{2\pi}{R}\hat{x}}\rangle =& \int_0^R dx\, e^{i\frac{2\pi}{R}x}\, |\psi(x)|^2 \\
=& \int_0^R dx\, e^{i\frac{2\pi}{R}x}\, \left[|A|^2 + |B|^2 + AB^* e^{i2k_n x} + A^* B e^{-i2k_n x}\right] \\
=& 0 \; ,
\end{aligned}$$

und erhalten $\langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle = 1 - |\langle e^{i\frac{2\pi}{R}\hat{x}}\rangle|^2 = 1$. Schliesslich erhält man für das hiesige Problem die Ungleichung $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle \, \langle(\mathbf{\Delta}\hat{x}_2)^2\rangle \geq 0$.

(b) Das haben wir getan um die andere Wahl des Ortsoperators $\hat{x}_1 = \hat{x} \mod R$ leichter analysieren zu k\"onnen, da dieser nicht zu solch einer leicht interpretierbarer Ungleichung (32) führt. Dennoch kann man das Unschärfeprodukt berechnen. Um dies zu tun, drücken wir den Operator geschickt mittels θ-Funktionen aus, nämlich (in Ortsdarstellung)

$$\hat{x}_1 = x - R\sum_{n=1}^{\infty}\theta(x - nR) + R\sum_{n=0}^{\infty}\theta(-nR - x) \; .$$

Für den Kommutator erhalten wir damit

$$
\begin{aligned}
[\hat{x}_1, \hat{p}] =& \hat{x}_1 \, \hat{p} - \hat{x}_1 \, \hat{p} - \frac{\hbar}{i}\Big(1 - R \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\partial_x \theta(x - nR)}_{\delta(x-nR)} + R \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\partial_x \theta(-nR - x)}_{-\delta(x+nR)}\Big) \\
=& i\hbar - i\hbar R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nR) \; ,
\end{aligned}
$$

und für den Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
\langle [\hat{x}_1, \hat{p}] \rangle =& i\hbar \int_0^R dx \, \left[1 - R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nR) \right] \\
=& i\hbar R - i\hbar R \lim_{\alpha \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{0+\alpha}^{R+\alpha} dx \, \delta(x - nR)}_{\delta_{n,1}} = 0 \; .
\end{aligned}
$$

Letztlich erhält man damit dieselbe Ungleichung wie für $\hat{x}_2$, allerdings ist die Interpretation nicht so eindeutig wie im vorigen Fall.

(c) Die Herleitung der Unschärferelation führt eigentlich zu der folgenden Ungleichung (siehe Skript)

$$
\langle (\Delta \hat{O})^2 \rangle \, \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle \left[\hat{O}, \hat{P} \right] \rangle \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \langle \left\{ \Delta \hat{O}, \Delta \hat{P} \right\} \rangle \right|^2 \; ,
$$

wobei der letzte Term normlerweise einfach vernachlässigt wird. Nun kann man überlegen, dass im Falle eines verschwindenden Kommutatorterms $\langle \left[\hat{O}, \hat{P} \right] \rangle = 0$, eventuell der Antikommutatorterm eine untere Schranke liefert. Nichtsdestotrotz liefert dieser Term ebenfalls eine null, sowie man sich in einem Impulseigenzustand, d.h. $\Delta \hat{P} \mid \psi \rangle = 0$, befindet.