

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 3

MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

Abgabe: 15.05.2017, 12:00h; Bespr.: 17.05.2017

1. Drehimpuls eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators (5 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator in zwei räumlichen Dimensionen

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)$$

wobei die Orts- und Impulsoperatoren die kanonische Kommutatorrelation $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ erfüllen. Wie auf Aufgabenblatt 1 gezeigt wurde, ist der Drehimpuls für Systeme mit Zentralpotential erhalten, bzw. der Drehimpulsoperator kommutiert mit dem Hamiltonoperator $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$. Auf Grund dieser Symmetrie lassen sich $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ simultan diagonalisieren. In dieser Darstellung lässt sich zudem die Entartung des Systems anschaulich bestimmen.

- (a) Mit Hilfe der Orts- und Impulsoperatoren und auf Grund deren Kommutatorrelation lassen sich Erzeuger- und Vernichteroperatoren definieren

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}_i + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_i \right).$$

Zeigen Sie zunächst, dass für diese Art von Operatoren die Kommutatorrelation $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ gilt.

- (b) Zeigen Sie, dass sich mit $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ der Hamiltonoperator diagonalisieren lässt. Bestimmen Sie das Spektrum von $\hat{H}$.
- (c) Zur simultanen Diagonalisierung von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$ lassen sich die Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{a}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - i\hat{a}_2) \\ \hat{a}_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + i\hat{a}_2) \end{aligned}$$

eingeführen. Überprüfen Sie deren Kommutatorrelation. Was folgt daraus?

- (d) Wie lautet die Darstellung von $\hat{L}_z = \hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{x}_2$ in dieser Basis? Bestimmen Sie die Spektren der Eigenwerte von $\hat{H}$ und $\hat{L}_z$. Schlussfolgern Sie daraus auf die Entartung der Energieeigenwerte. Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Hermite Polynome (3 Punkte, schriftlich)

In der Vorlesungen wurde gezeigt, dass sich die Eigenzustände $\psi(\xi)$ des quantenmechanischen Oszillators, die die dimensionslose stationäre Schrödingergleichung

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\epsilon - \xi^2)\psi = 0$$

lösen, durch Hermite Polynome $H_n(\xi)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ konstruieren lassen. Diese Zustände, gekennzeichnet durch die Quantenzahl n , lauten $\psi_n(\xi) = A_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$. Die Hermite Polynome sind definiert durch

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass Hermite Polynome durch die Taylorentwicklung des Ausdrucks

$$e^{-t^2+2\xi t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\xi)$$

generiert werden.

- (b) Zeigen Sie die Rekursionrelation

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi)$$

und

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$$

und leiten Sie damit die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d}{d\xi} + 2n \right] H_n(\xi) = 0$$

her.

(c) Zeigen Sie die Orthogonalität der Hermite Polynome

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = 0$$

für $m \neq n$ aus der die Orthogonalität der Zustände des quantenmechanischen Oszillators folgt.

3. Streuung am δ -Potential (4 Punkte, mündlich)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Lösungen der Schrödingergleichung und ihre ersten Ableitungen die Stetigkeitsbedingungen erfüllen müssen. Im Falle von Potentials, die durch eine δ -Funktionen dargestellt werden, erhält man modifizierte Anschlussbedingungen. Für solch ein System soll das Transmissions- und Reflexionsverhalten für Streuzustände untersucht werden.

Betrachten Sie ein eindimensionales System mit einem δ -Potential

$$V(x) = V_0 \delta(x - x_0)$$

wobei die δ -Funktion definiert ist durch $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) f(x) = f(a)$.

- (a) Leiten Sie die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion und ihrer Ableitung ψ und $\frac{d\psi}{dx}$ bei $x = 0$ her. Integrieren Sie hierzu die stationäre Schrödingergleichung in einem Intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ um die singuläre Stelle x_0 und bilden Sie anschließend den Limes $\epsilon \rightarrow 0$.
- (b) Bestimmen Sie den Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für eine einlaufende Welle $\psi_{in}(x) = Ae^{ikx}$. Zeichnen Sie beide Koeffizienten als Funktion der Energie.
- (c) Bestimmen Sie die zusätzliche Phase, die die Welle beim Passieren des Potentials erhält.
- (d) Wie verhält sich der Phasensprung und das Transmissions-/Reflexionsverhalten für $V_0 \rightarrow -V_0$?