Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 5
Abgabe: 29.05.2017, 12:00h; Bespr.: 31.05.2017

---

1. Drehimpuls eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators (5 Punkte, mündlich)

a) Die Kommutatorrelationen folgen aus $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ zu

$$\begin{aligned}[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar}[\hat{x}_i + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_i, \hat{x}_j - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_j] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left([\frac{i}{m\omega}\hat{p}_i, \hat{x}_j] - [\hat{x}_i, \frac{i}{m\omega}\hat{p}_j]\right) \\ &= \frac{m\omega}{\hbar}\frac{i}{m\omega}[\hat{p}_i, \hat{x}_i]\delta_{ij} = \delta_{ij}\end{aligned}$$

b) Die Erzeuger- und Vernichteroperatoren lassen sich invertieren

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i\right) \\ \hat{p}_i &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i\right)\end{aligned}$$

welche eingesetzt in $\hat{H}$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1\right)$$

ergeben. Es ist klar, dass sich mögliche Zustände des Systems als Produktansatz von Zustände zweier entkoppelter harmonischer Oszillatoren $H_i = \hbar\omega\left(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \frac{1}{2}\right)$ schreiben lassen

$$|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$$

mit $|n_i\rangle \propto \left(a_i^\dagger\right)^{n_i}|0\rangle$ und $\hat{n}_i|n_i\rangle = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i|n_i\rangle = n_i|n_i\rangle$ wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Das Energiespektrum ergibt sich folglich zu

$$E = \hbar\omega\,(n+1)$$

wobei $n = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}_0$. Man sieht jetzt schon, dass die Eigenwerte $n+1$-fach entartet sind: Es gibt $n+1$ Möglichkeiten, n aus n_1 und n_2 zu bilden. Durch Angabe von der Energiequantenzahl n ist ein Zustand des Systems aber nicht eindeutig definiert, die Verwendung einer weiteren Quantenzahl zur Erzeugung einer eindeutigen Basis ist notwendig.

c) Die Vertauschungsrelation lässt sich schnell überprüfen:

$$\begin{aligned}[\hat{a}_R, \hat{a}_R^\dagger] &= \frac{1}{2}\left[(\hat{a}_1 - i\hat{a}_2), \left(\hat{a}_1^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\right] + \left[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\right]\right) \\ &= 1 \\ [\hat{a}_L, \hat{a}_L^\dagger] &= 1 \\ [\hat{a}_L, \hat{a}_R^\dagger] &= 0 \\ [\hat{a}_R, \hat{a}_L^\dagger] &= 0\end{aligned}$$

Die Operatoren $\hat{a}_R, \hat{a}_L$ erfüllen somit die identischen Vertauschungsrelation für Erzeuger- und Vernichter, wodurch sich wiederum Eigenzustände $|n_R, n_L\rangle \propto \left(\hat{a}_R^\dagger\right)^{n_R} \left(\hat{a}_R^\dagger\right)^{n_R} |0\rangle$ konstruieren lassen, wobei $\hat{n}_{R/L}|n_R, n_L\rangle = \hat{a}_{R/L}^\dagger \hat{a}_{R/L}|n_R, n_L\rangle = n_{R/L}|n_i\rangle$ mit $n_R, n_L \in \mathbb{N}_0$.

d) Der Drehimpulsoperator ausgedrückt durch Erzeuger- und Vernichteroperatoren in der Ortsbasis ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\hat{L}_z &= \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{p}_1\hat{x}_2 \\ &= i\hbar \left(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right)\end{aligned}$$

welcher offensichtlich nicht diagonal in $\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ ist. Mit der angegeben Transformation erhalten wir für den Hamiltonoperator und den Drehimpulsoperator

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hbar\omega \left(\hat{a}_R^\dagger\hat{a}_R + \hat{a}_L^\dagger\hat{a}_L + 1\right) \\ &\equiv \hbar\omega\,(\hat{n} + 1) \\ \hat{L}_z &= \hbar \left(\hat{a}_R^\dagger\hat{a}_R - \hat{a}_L^\dagger\hat{a}_L\right) \\ &\equiv \hbar\hat{m}\end{aligned}$$

Hier ist zu sehen, dass der Drehimpulsoperator die Differenz der rechts R und links L laufenden Moden misst, sich die Energie aber aus der Gesamtanzahl der Moden ergibt. Des Weiteren transformiert $\hat{L}_z$ ungerade unter Zeitumkehr $\mathcal{T}$, wie es für den Drehimpuls gelten muss, da $\hat{a}_L$ und $\hat{a}_R$ ineinander übergehen: $\mathcal{T}\hat{a}_R = \mathcal{T}(\hat{a}_1 - i\hat{a}_2) = \hat{a}_1 + i\hat{a}_2 = \hat{a}_L$.

Durch Redefinition der Operatoren lassen sich somit die Zustände $|nm\rangle$ mit

$$\begin{aligned}\hat{n}|nm\rangle &= n|nm\rangle \\ \hat{m}|nm\rangle &= m|nm\rangle\end{aligned}$$

definieren, die auf Grund von $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$ eine vollständige Basis des Hilbertraums aufspannen. Die Spektren ergeben sich zu

$$\begin{aligned}&n \in \mathbb{N}_0 \\ &m \in \{-n, -n+2, \ldots, n-2, n\}\end{aligned}$$

Da der Hamiltonoperator unabhängig von $\hat{m}$ ist, ist jeder Zustand $|nm\rangle$ $n+1$-fach entartet. Drehimpulseigenwerte werden, wie eventuell aus der Experimentalphysik bekannt, in Einheiten von $\hbar$ gemessen und sind quantisiert. Diejenigen Zustände, die maximalen Drehimpuls besitzen, sind entweder vollständig rechts $m = n$ oder vollständig links $m = -n$ drehende Zustände.

2. Hermite Polynome (3 Punkte, schriftlich)

a)

$$\begin{aligned}e^{-t^2+2\xi t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2+2\xi t}\right)\bigg|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-(t-\xi)^2+\xi^2}\right)\bigg|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\xi^2}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-(t-\xi)^2}\right)\bigg|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\xi^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\bigg|_{x=-\xi} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\xi^2}(-1)^n\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right) \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

womit sich

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

ablesen laesst.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi} e^{-t^2+2\xi t} &= 2te^{-t^2+2\xi t} \\
&= 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\xi) \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(\xi) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(\xi) \\
&= 2n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n-1}(\xi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d}{d\xi} H_n(\xi)
\end{aligned}$$

womit sich

$$\frac{d}{d\xi} H_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi)$$

für $n \geq 1$ ablesen lässt. Die zweite Rekursionsgleichung folgt aus

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{-t^2+2\xi t} &= 2\left(-t+\xi\right) e^{-t^2+2\xi t} \\
&= 2\left(-t+\xi\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\xi) \\
&= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(\xi) + 2\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\xi) \\
&= -2n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n-1}(\xi) + 2\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\xi) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\xi) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H_n(\xi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(\xi)
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$-2nH_{n-1}(\xi) + 2\xi H_n(\xi) = H_{n+1}(\xi)$$

für $n \geq 1$. Die Differentialgleichung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
-2nH_{n-1}(\xi) + 2\xi H_n(\xi) &= H_{n+1}(\xi) \\
\left(-\frac{d}{d\xi} + 2\xi\right) H_n(\xi) &= H_{n+1}(\xi) \\
\left(-\frac{d}{d\xi} + 2\xi\right) \frac{1}{2(n+1)} \frac{d}{d\xi} H_{n+1}(\xi) &= H_{n+1}(\xi)
\end{aligned}$$

wobei wir $n+1 \to n$ setzen

$$\left(-\frac{d}{d\xi}+2\xi\right)\frac{d}{d\xi}H_n(\xi) = 2nH_n(\xi)$$
$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-2\xi\frac{d}{d\xi}+2n\right)H_n(\xi) = 0.$$

c) Man betrachtet zum Beispiel

$$\begin{aligned}
2n\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}\left(-\frac{d^2H_n(\xi)}{d\xi^2}+2\xi\frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\right)H_m(\xi) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\left(\frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2}H_m(\xi)\right)+2\xi e^{-\xi^2}\frac{dH_m(\xi)}{d\xi}H_m(\xi)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}\frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\frac{dH_m(\xi)}{d\xi}
\end{aligned}$$

wobei die Randterme in der partiellen Integration verschwinden. Ebenso lässt sich auch $H_m(\xi)$ in der ersten Zeile substituieren

$$2m\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}\frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\frac{dH_m(\xi)}{d\xi}$$

Die Subtraktion beider Gleichung ergibt

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi) = 0$$

welches impliziert, dass $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi) = 0$ für $m \neq n$.

3. Streuung am δ-Potential (4 Punkte, mündlich)

a) Die stationäre Schrödingergleichung in einer Dimension lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x).$$

Die SG integriert über das Intervall $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ ergibt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx\,\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V_0\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx\,\delta(x)\psi(x) = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx\, E\psi(x)$$

Die rechte Seite verschwindet im Limes $\epsilon \to 0$, da E eine Konstante ist und die Forderung nach Stetigkeit für die Wellenfunktion erfüllt sein muss: Die Grenzwerte von rechts und links sind identisch, $\lim_{\epsilon\to 0}\psi(x_0+\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\psi(x_0-\epsilon) = \psi(0)$.
Für den ersten Term der linken Seite gilt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx\,\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\psi(x)\right)\Bigg|_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(x_0+\epsilon)-\psi'(x_0-\epsilon)\right),$$

und für den zweiten Term

$$V_0\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx\,\delta(x)\psi(x) = V_0\psi(0).$$

Somit erhält man für den Limes $\epsilon \to 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi'(x)\big|_{x=x_0} = -\frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\psi'(x_0+\epsilon)-\psi'(x_0-\epsilon)\right) = V_0\psi(0)$$

einen endlichen Sprung in der Ableitung der Wellenfunktion.

b) Die Lösung der SG wird stückweise definiert

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x_0 < 0 \\ Ce^{ikx} & x_0 > 0 \end{cases}$$

wobei es sich bei A, B und C jeweils um die Amplituden der einlaufenden, reflektieren und transmittierten Wellen handelt. Die Wellenzahl ist mit der Energie der Streuzustände über die herkömmliche Relation für freie Teilchen $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ verknüpft. Der Transmissions- und Reflexionskoeffizient bestimmt sich zu

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2, \quad R = \left|\frac{C}{A}\right|^2.$$

Zur Bestimmung der Wellenamplituden werden die geforderten Randbedingungen, wie in der vorherigen Aufgabe hergeleitet, für die Lösungen der SG verwendet. Die Stetigkeitsbedingung kombiniert mit der endlichen Diskontinuität der ersten Ableitung bei $x = x_0$ ergibt

$$\begin{aligned} Ae^{ikx_0} + Be^{-ikx_0} &= Ce^{ikx_0} \\ \left(ik - \frac{2m}{\hbar} V_0\right) Ce^{ikx_0} &= ik(Ae^{ikx_0} - Be^{-ikx_0}). \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Amplituden ergibt sich zu

$$\frac{C}{A} = \frac{k}{k + i\frac{mV_0}{\hbar^2}} = \frac{k^2 - i\frac{mkV_0}{\hbar^2}}{k^2 + \left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2} = \frac{ke^{i\phi}}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2}}$$

mit $\phi = \arctan\left(\frac{mV_0}{\hbar^2 k}\right)$, was dem Phasensprung der Welle entspricht (siehe Aufgabenteil c)). Der Transmissionskoeffizient wird zu

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2} = \frac{E}{E + \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}} = \frac{1}{1 + \frac{mV_0^2}{2\hbar^2 E}}.$$

Der Reflexionskoeffizient ist damit gegeben durch

$$R = 1 - T = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{mV_0^2}}.$$

c) siehe Aufgabenteil b).

d) Die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten hängen von V_0^2, und sind somit nicht sensitiv auf das Vorzeichen des δ-Potentials. Anders sieht es bei dem Phasensprung aus: Dieser ändert das Vorzeichen.

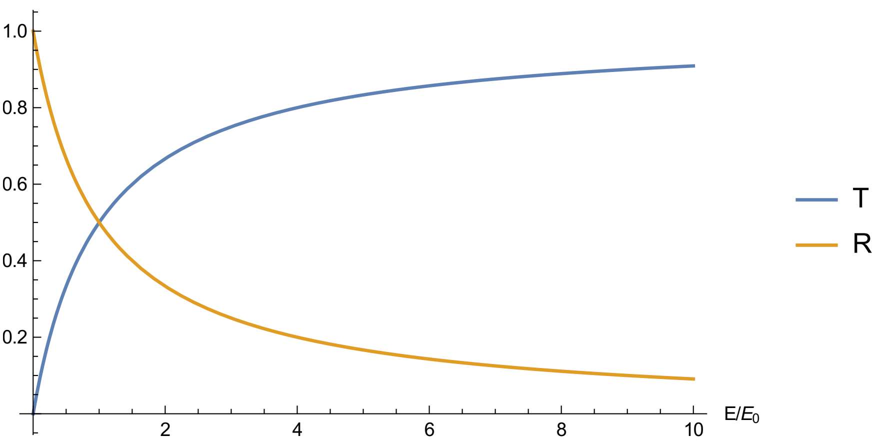

Abbildung 1: Transmissions- und Reflexionskoeffizient mit $E_0 = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$