Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 6
Abgabe: 06.06.2017, 12:00h, Bespr.: 07.06.2017

---

1. Harmonischer Oszillator (5 Punkte, mündlich)

Wie gezeigt wurde, läßt sich der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators durch Auf- und Absteigeoperatoren (oder auch Leiteroperatoren), $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$, schreiben als

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\big[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\big]. \tag{1}$$

Die Operatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ sind dabei definiert als

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right] \qquad \text{und} \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right], \tag{2}$$

und deren Wirkung auf die stationären Eigenzustände $|\, n\,\rangle$ des Hamiltonoperators ist gekennzeichnet durch

$$\hat{a}\,|\, n\,\rangle = \sqrt{n}\,|\, n-1\,\rangle \qquad \text{und} \qquad \hat{a}^\dagger\,|\, n\,\rangle = \sqrt{n+1}\,|\, n+1\,\rangle\,. \tag{3}$$

(a) Man spricht oft davon, dass die Beschreibung durch Leiteroperatoren geschickt ist. Um das zu verinnerlichen berechnen Sie das Matrixelement $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ einmal mittels Leiteroperatoren, und einmal explizit mit der Wellenfunktion im Ortsraum

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)^2} H_n\Big(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\Big)\,. \tag{4}$$

Tipp: Die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x) = 2^n\, n!\,\sqrt{\pi}\,\delta_{n,m}\;, \tag{5}$$

und die Relation $H_n'(x) = 2n\,H_{n-1}(x)$ (siehe Blatt 5) könnten von Nutzen sein.

(b) Berechnen Sie nun die weiteren Matrixelemente:

$$\langle n|\hat{a}|m\rangle \qquad \langle n|\hat{a}^\dagger|m\rangle \qquad \langle n|\hat{p}|m\rangle \qquad \langle n|\hat{x}^2|m\rangle \qquad \langle n|\hat{p}^2|m\rangle$$

(c) Zeigen Sie, dass im Falle des harmonischen Oszillators für Eigenzustände die Erwartungswerte für kinetische Energie $\left\langle \hat{T} \right\rangle$ und potentielle Energie $\left\langle \hat{V} \right\rangle$ gleich sind.

(d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand $|\,\psi(0)\,\rangle$ des Systems gegeben durch eine Superposition des Grundzustands $|\,0\,\rangle$ und des ersten angeregten Zustands $|\,1\,\rangle$

$$|\,\psi(0)\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\,0\,\rangle + |\,1\,\rangle\big). \tag{6}$$

Bestimmen Sie $|\,\psi(t)\,\rangle$ für beliebige Zeiten t.
Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\,\psi(t)\,|\,\hat{x}\,|\,\psi(t)\,\rangle$ und $\langle\,\psi(t)\,|\,\hat{p}\,|\,\psi(t)\,\rangle$.

(e) Die Eigenzustände $\{|\,n\,\rangle; n = 0, 1, \ldots\}$ bilden eine diskrete Basis. In dieser Basis können die Zustandsvektoren $|\,\psi\,\rangle$ als Spaltenvektor mit den Komponenten $\langle n|\psi\rangle$ dargestellt werden. So lassen sich z.B. die Eigenzustände $|\,n\,\rangle$ darstellen als

$$|\,0\,\rangle \widehat{=} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \qquad |\,1\,\rangle \widehat{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \qquad |\,2\,\rangle \widehat{=} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad \text{usw.} \tag{7}$$

Operatoren können entsprechend als Matrix dargestellt werden.
Skizzieren[1] Sie die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{x}$ und $\hat{H}$ in dieser Basis.

[1] Die Basis ist abzählbar, aber unendlich. Damit können die Operatoren nicht vollständig dargestellt werden. Siehe auch die Zustandsvektoren (7).

2. Gebundener Zustand im δ-Potential (3 Punkte, schriftlich)

In Aufgabe 3 des letzten Aufgabenblattes haben Sie sich mit den Streuzuständen ($E > 0$) für ein δ-Potential beschäftigt. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit gebundenen Zuständen im attraktiven δ-Potential

$$V(x) = -V_0\,\delta(x) \qquad\qquad V_0 > 0\,. \tag{8}$$

Gebunden heißt $E < 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es hier nur einen gebundenen Zustand mit der Energie

$$E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \tag{9}$$

gibt. Bestimmen Sie die zugehörige normierte Wellenfunktion. Nehmen Sie dabei die Normierungskonstante als reell an.
Tipp: Gehen Sie dabei analog mit den Anschlussbedingungen vor wie in Aufgabe 3 des letzten Blattes.

(b) Bestimmen Sie die Länge a des symmetrischen Intervalls $[-a, a]$, in welchem das Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ zu finden ist.

In der Vorlesung haben Sie die gebundenen Zustände ($-\bar{V}_0 < E < 0$) im attraktiven Kastenpotential

$$\bar{V}(x) = -\bar{V}_0\,\theta(a - |x|) \tag{10}$$

kennengelernt. Für die geraden (g) und ungeraden (u) Wellenfunktionen findet man jeweils eine Gleichung, die die Energie besimmt, nämlich

$$\psi_g(x) = A\,e^{-\kappa|x|}\,\theta(|x| - a) + C\,\cos(kx)\,\theta(a - |x|) \qquad \rightarrow \quad \kappa = k\,\tan(ka) \tag{11}$$

$$\psi_u(x) = -\mathrm{sign}(x)\,A\,e^{-\kappa|x|}\,\theta(|x| - a) + C\,\sin(kx)\,\theta(a - |x|) \qquad \rightarrow \quad \kappa = -k\,\cot(ka)\,. \tag{12}$$

Hierbei sind $\kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ und $k = \sqrt{\frac{2m(E+\bar{V}_0)}{\hbar^2}}$. In diesem Teil der Aufgabe wird der Grenzfall eines unedlich tiefen und endlich schmalen Kastenpotentials betrachtet, d.h. das Kastenpotential wird zu einem δ-Potential.

(c) Betrachtet wird der Grenzfall $a \to 0$ und $\bar{V}_0 \to \infty$, wobei $a\bar{V}_0 \to$ const. Bestimmen Sie $\bar{V}_0 = \bar{V}_0(a)$ so, dass das Potential (10) in das Potential (8) übergeht.
Tipp: Eine mögliche Darstellung der δ-Funktion lautet $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\,\theta(\frac{\epsilon}{2} - |x|)$ für $\epsilon \to 0$.

(d) Zeigen Sie nun, ausgehend von (11) und (12), dass es in diesem Grenzfall ($a \to 0$) nur noch einen gebundenen Zustand gibt, nämlich (9).