Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 7
Abgabe: 12.06.2017, 12:00h; Bespr.: 14.06.2017

---

1. Bahndrehimpuls (3 Punkte, schriftlich)

Der Drehimpulsoperator in drei Dimensionen ist definiert als $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$.

a) Zeigen Sie, dass der die Komponenten des Drehimpulsoperators in Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ und $z = r\cos\theta$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\partial_\theta - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\right)\\ \hat{L}_y &= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\right)\\ \hat{L}_z &= \frac{\hbar}{i}\partial_\phi\end{aligned}$$

wobei $\partial_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial\theta}$ und $\partial_\phi \equiv \frac{\partial}{\partial\phi}$. Verwenden Sie hierfür, dass der Gradient in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

mit den Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z\\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_z\\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y.\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = N\,(x+y+2z)\,e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}$$

eine Eigenfunktion des Operators $\hat{\mathbf{L}}^2$ ist, wobei

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left(\partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta\right)$$

Die Wirkung von $\hat{\mathbf{L}}^2$ auf Eigenfunktionen ist gegeben durch

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi(\mathbf{r}) = \hbar^2 l(l+1)\psi(\mathbf{r})$$

Bestimmen Sie $l \in \mathbb{N}_0$.

c) Wie lautet der Erwartungswert $\langle\hat{L}_z\rangle$? Die Wirkung von $\hat{L}_z$ auf Kugelflächenfunktionen ist gegeben durch

$$\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi)$$

2. Teilchen im 3-dimensionalen endlichen Potentialtopf (4 Punkte, mündlich)

Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie von gebunden Zuständen eines Teilchens in einem 3-dimensionalen kugelsymmetrischen Potentialtopf mit Drehimpuls $l = 0$. Gibt es eine minimale Potentialstärke, um gebundene Zustände zu ermöglichen?

Der Hamiltonoperator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2} + V(r)$$

mit einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$. Das Potential ist definiert als

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r \le a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und hängt nur von der Radialkoordinate r ab. a ist der Radius des Potenialtopfs und $\hat{\mathbf{L}}$ der Drehimpulsoperator wie in der vorherigen Aufgabe angegeben.

a) Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die Grundzustandswellenfunktion und bestimmen Sie die zu lösende Schrödingergleichung.
Hinweis: Die gesuchte Wellenfunktion kann nur von der Radialkoordinate r abhängen.

b) Schreiben Sie die erhaltene Schrödingergleichung durch einen Ansatz der Form $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$ um. Machen Sie dann einen geeigneten Ansatz für $u(r)$. Achten Sie darauf, dass die resultierende Wellenfunktion normierbar sein muss. Zeigen Sie, dass die Eigenenergien den Lösungen der transzendenten Gleichung

$$-\kappa \tan(ka) = k \tag{1}$$

entsprechen. Hier ist $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$ und $\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$.

c) Analysieren Sie Gl. 1 und bestimmen Sie den Wertebereich der Grundzustandsenergie. Gibt es eine minimale Potentialstärke, um gebundene Zustände zu ermöglichen?

3. Drehimpulsalgebra (3 Punkte, mündlich)

Die Komponenten des Drehimpulses erfüllen die Kommutatoralgebra

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

mit $i, j, k \in \{x, y, z\}$. Daraus lässt sich ableiten, dass

$$[\hat{L}_z, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0.$$

Somit lassen sich Eigenfunktionen konstruieren, die simultane Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ sind. Die Wirkung dieser Operatoren auf Eigenzustand $|l, m\rangle$ mit Eigenwert l und m ist definiert als

$$\hat{\mathbf{L}}^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle$$
$$\hat{L}_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle$$

Es lassen sich zusätzlich die Operatoren

$$\hat{L}_+ = L_x + iL_y$$
$$\hat{L}_- = L_x - iL_y$$

definieren.

a) Untersuchen Sie die Wirkung von $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$ auf einen beliebigen Zustand $|l, m\rangle$. Bestimmen Sie dazu $\hat{L}_z\hat{L}_\pm|m, l\rangle$, indem Sie beide Operatoren kommutieren.

b) Untersuchen Sie die Fälle $\hat{L}_+|l, l\rangle$ und $\hat{L}_-|l, -l\rangle$ und zeigen Sie, dass der Wertebereich von m beschränkt ist. Drücken Sie hierfür $\hat{\mathbf{L}}^2$ durch $\hat{L}_z$ und $\hat{L}_\pm$ aus und untersuchen Sie deren Wirkung auf die eben genannten Zustände.

c) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls nur ganz- oder halbzahlige Eigenwerte annehmen kann.