Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN
MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

Blatt 8
Abgabe: 19.06.2017, 12:00h, Bespr.: 21.06.2017

---

1. Pauli-Matrizen und Spin (5 Punkte, schriftlich)

Die Pauli-Matrizen sind definiert über

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Der $s = \frac{1}{2}$ Spin eines Elektrons kann beschrieben werden durch die Operatoren

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}. \tag{2}$$

(a) Beweisen Sie die Formel

$$\sigma_j \sigma_k = \mathbb{1}_2 \delta_{jk} + i\epsilon_{jkm}\sigma_m \tag{3}$$

wobei $\mathbb{1}_2 = \mathrm{diag}(1,1)$. Leiten Sie daraus

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\,\mathbb{1}_2\delta_{jk} \qquad [\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkm}\sigma_m \tag{4}$$

her und zeigen Sie, dass $\left[\hat{S}_j, \hat{S}_k\right] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{S}_l$ gilt. Die Spinoperatoren erüllen also eine Drehimpulsalgebra[1].

(b) Beweisen Sie für beliebige $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$, dass

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{1}_2 + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma} \tag{5}$$

(c) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände/Eigenvektoren und Eigenwerte der $\hat{S}_i$. In welcher Spin-Eigenbasis arbeiten wir, wenn wir die Pauli-Matrizen als Darstellung des Spins benutzen?

(d) Bestimmen Sie $\vec{S}^2$ und zeigen Sie, dass die Eigenzustände von $\hat{S}_i$ auch Eigenzustände von $\vec{S}^2$ sind. Welche Eigenwerte besitzt $\vec{S}^2$?

(e) Seien $|\uparrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nun die Eigenzustände zu S_z. Bestimmen Sie die Wirkung der Leiteroperatoren $S_\pm = S_x \pm iS_y$ auf $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ und könnten wir diese auch ohne explizite Rechnung bestimmen?

2. Spindrehungen und unitäre Matrizen (4 Punkte, mündlich)

In der Vorlesung haben Sie gesehen wie ein skalares Feld unter Rotation ($r' = Rr$, mit R eine 3×3-Drehmatrix) transformiert. In dieser Aufgabe soll nun das Transformationsverhalten für mehrkomponentige Felder unter Rotation untersucht werden. Insbesondere wollen wir herleiten wie ein zweikomponentiger Spinor transformiert. Systematisch kann man für ein skalares Feld φ, für einen zweikomponentigen Spinor $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, und für einen dreikomponentigen Vektor $A = (A_1, A_2, A_3)^T$ schreiben

$$\begin{aligned} \varphi'(r') &= \varphi(r) & \psi'(r') &= U_S\,\psi(r) & A'(r') &= R\,A(r) \\ \varphi'(r) &= U_L\,\varphi(r) & \psi'(r) &= U_S U_L\,\psi(r) & A'(r) &= RU_L\,A(r)\,. \end{aligned}$$

Hierbei wirken U_s und R auf die mehrdimensionalen Strukturen, wobei U_L auf die jeweiligen skalaren Komponenten wirkt. Der unitäre Operator $U_L = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{\phi}\cdot\vec{L}\right)$ sei bekannt, genauso wie die Drehmatrix R (z.B. für eine Drehung um einen kleinen Winkel $\vec{\phi}$, $R\vec{a} \approx \vec{a} + \vec{\phi}\times\vec{a}$).

[1] Diese entspricht einer Lie-Algebra $su(2)$.

Eine explizite Form für den 'Spindrehoperator' U_S leiten wir unter Annahme der Invarianz der Pauli-Gleichung unter Rotation her. (Drehen wir das Koordinatensystem und alle darin befindlichen räumlichen Felder gleichermaßen, muss die Gleichung dieselbe Form haben.) Die Pauli-Gleichung beschreibt ein geladenes Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

$$i\hbar\partial_t\psi(r,t) = \hat{H}(r)\,\psi(r,t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(r)\right)^2 + eU(r) + \underbrace{\mu_B\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(r)}_{\hat{H}_B(r)}\right]\psi(r,t)\,. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und eine orthogonale Matrix O gilt: $\vec{a}\,O\,\vec{b} = \vec{b}\,O^{-1}\,\vec{a}$.

(b) Benutzen Sie die skalare Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r) = \psi^\dagger(r)\,\psi(r)$ um zu zeigen, dass U_S unitär sein muss.

(c) Im Folgenden genügt es lediglich den Beitrag $\hat{H}_B(r)$ des Hamiltonoperators zu betrachten. Zeigen Sie aus der Invarianz der Pauli-Gleichung, dass U_S folgende Gleichung erfüllen muss

$$U_S^\dagger\vec{\sigma}U_S = R\vec{\sigma}\,. \tag{7}$$

Tipp : Ersetzen Sie in (6) alle Felder $\eta(r)$ durch $\eta'(r')$ und vergleichen Sie mit der urspünglichen Form. Der Spin ändert sich nicht.

(d) Machen Sie nun den Ansatz $U_S = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{\phi}\cdot\vec{a}\right)$, und zeigen Sie, dass für kleine Winkel $\vec{\phi}$ aus (7) folgt: $\vec{a} \equiv \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$.

3. Spin im Magnetfeld (3 Punkte, mündlich)

Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = -\frac{2\mu_B}{\hbar}\vec{S}$ befindet sich in einem zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$. Die Kopplung des Spins an das Magnetfeld wird beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{2\mu_B}{\hbar}\,\vec{S}\cdot\vec{B}\,.$$

Offensichtlich stellt der Zeitentwicklungsoperator von diesem Problem

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{\phi}(t)\cdot\vec{S}\right)$$

ein Spindrehoperator mit dem Drehwinkel $\vec{\phi}(t) = \vec{\omega}\,t$ dar. Die Frequenz ist gegeben durch $\vec{\omega} = \frac{2\mu_B}{\hbar}\,\vec{B}$.

(a) Zeigen Sie, dass Sie den Zeitentwicklungsoperator ($|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi(0)\rangle$) schreiben können als

$$U(t) = \exp\left(-iMt\right) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\,\mathbb{1}_2 - i\frac{2}{\omega_0}\,M\,\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\,,$$

mit der Matrix $M = \frac{1}{2}\left(\omega_z\,\sigma_z + \omega_x\,\sigma_x + \omega_y\,\sigma_y\right)$ und $\omega_0 \equiv |\vec{\omega}|$. Arbeiten Sie in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ der S_z Eigenvektoren, wobei $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}$.
Tipp : Berechnen Sie M^2.

(a) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Zustand $|\,\psi(0)\,\rangle = |\,\psi_\uparrow(0)\,\rangle \equiv |\uparrow\rangle$. Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeit $P_{\uparrow\uparrow}(t)$ das Teilchen nach der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden, schreiben lässt als

$$P_{\uparrow\uparrow}(t) = |\,\langle\uparrow|\psi(t)\rangle\,|^2 = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2}\,\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\,.$$

Berechnen Sie zudem $P_{\downarrow\uparrow}(t)$, die Wahrscheinlichkeit das Teilchen nach der Zeit t im Zustand $|\downarrow\rangle$ zu finden.