Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 8 (Lösung)
Abgabe: 19.06.2017, 12:00h, Bespr.: 21.06.2017

---

1. Pauli-Matrizen und Spin (5 Punkte, schriftlich)

(a) (1,5 Punkte) Wir berechnen explizit

$$\sigma_x\sigma_x = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$
$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} = i\sigma_z = i\epsilon_{123}\sigma_z$$
$$\sigma_x\sigma_z = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -i\sigma_y = i\epsilon_{132}\sigma_y$$
$$\sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix} = -i\sigma_z = i\epsilon_{213}\sigma_z$$
$$\sigma_y\sigma_y = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$
$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} = i\sigma_x = i\epsilon_{231}\sigma_x$$
$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = i\sigma_y = i\epsilon_{312}\sigma_y$$
$$\sigma_z\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = -i\sigma_x = i\epsilon_{321}\sigma_x$$
$$\sigma_z\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

sodass:

$$\sigma_j\sigma_k = \mathbb{1}_2\delta_{jk} + i\epsilon_{jkm}\sigma_m \tag{1}$$

Damit folgt natürlich direkt

$$[\sigma_j,\sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j \overset{(1)}{=} i\epsilon_{jkm}\sigma_m - i\epsilon_{kjm}\sigma_m = 2i\epsilon_{jkm}\sigma_m \tag{2}$$
$$\{\sigma_j,\sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j \overset{(1)}{=} 2\delta_{jk}\mathbb{1}_2 + i\epsilon_{jkm}\sigma_m + i\epsilon_{kjm}\sigma_m = 2\delta_{jk}\mathbb{1}_2 \tag{3}$$

und

$$\left[\hat{S}_j,\hat{S}_k\right] = \frac{\hbar^2}{4}\left[\sigma_j,\sigma_k\right] \overset{(2)}{=} \frac{\hbar^2}{4}2i\epsilon_{jkm}\sigma_m = i\hbar\epsilon_{jkm}\frac{\hbar\sigma_m}{2} = i\hbar\epsilon_{jkm}\hat{S}_m \tag{4}$$

(b) (0,5 Punkte) Wir nutzen (1) um zu zeigen

$$\begin{aligned}(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) &= a_j b_k \underbrace{\sigma_j\sigma_k}_{\mathbb{1}_2\delta_{jk}+i\epsilon_{jkm}\sigma_m}\\ &= a_j b_j\mathbb{1}_2 + i\epsilon_{jkm}a_j b_k\sigma_m\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{1}_2 + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}\end{aligned} \tag{5}$$

(c) (1 Punkt) Die normierten Eigenzustände und Eigenwerte der Spinoperatoren sind gerade

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}_x: && \vec{a}_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} && s_x^1 = \frac{\hbar}{2},\ s_x^2 = -\frac{\hbar}{2}\\
&\hat{S}_y: && \vec{a}_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\ \vec{a}_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} && s_y^1 = \frac{\hbar}{2},\ s_y^2 = -\frac{\hbar}{2}\\
&\hat{S}_z: && \vec{a}_z^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{a}_z^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} && s_z^1 = \frac{\hbar}{2},\ s_z^2 = -\frac{\hbar}{2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Offensichtlich arbeiten wir in der Basis der $\hat{S}_z$ Eigenzustände, was man schon an der Diagionalform von $\hat{S}_z$ ablesen kann.

(d) (0,5 Punkte) Wir nutzen die Formel (1) um zu zeigen, dass

$$
\vec{S}^2 = \sum_i \hat{S}_i \cdot \hat{S}_i = \frac{\hbar^2}{4}\sum_i \sigma_i\sigma_i = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}_2\sum_i \delta_{ii} = \frac{3}{4}\hbar^2\mathbb{1}_2 \tag{7}
$$

wobei wir die Summe trotz Summenkonvention schreiben um klar zu machen, dass wir am Ende wirklich noch summieren müssen. Da $\vec{S}^2 \sim \mathbb{1}_2$ ist jeder beliebige Vektor $\vec{a} \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenzustand zu $\vec{S}^2$ mit dem Eigenwert $3/4\hbar^2$, also auch die Eigenzustände der $\hat{S}_i$ in (6).

Dies hätten wir auch direkt aus der Drehimpulsalgebra ablesen können, da wir wissen dass:

(i) gilt $[\vec{S}^2, \hat{S}_i] = 0$ und damit $\vec{S}^2$ und $\hat{S}_i$ gemeinsame Eigenzustände besitzen.

(ii) ein $s = 1/2$ Spin für das Drehimpulsquadrat $\vec{S}^2$ den Erwartungswert $\hbar^2 s(s+1) = 3/4\hbar^2$ hat.

(e) (1,5 Punkte) Die Leiteroperatoren sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_+ &= \hat{S}_x + i\hat{S}_y = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\\
\hat{S}_- &= \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

und damit gilt für $|\uparrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_+ |\uparrow\rangle &= 0\\
\hat{S}_+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle\\
\hat{S}_- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle\\
\hat{S}_- |\downarrow\rangle &= 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Wir könnten hier auch einfach ausnutzen, dass die Zustände gerade Drehimpulszustände mit den Quantenzahlen $j = 1/2$ und $m = 1/2, -1/2$, also gerade $|\uparrow\rangle = |1/2, 1/2\rangle$ und $|\downarrow\rangle = |1/2, -1/2\rangle$ sind. Die Wirkung der Leiteroperatoren ist nach

$$
\hat{L}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle \tag{10}
$$

somit

$$
\begin{aligned}
&\hat{S}_+ |\uparrow\rangle = \hat{S}_+ |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2+1)}\,|1/2, 3/2\rangle = 0\\
&\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \hat{S}_+ |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2+1)}\,|1/2, 1/2\rangle = |1/2, 1/2\rangle = |\uparrow\rangle\\
&\hat{S}_- |\uparrow\rangle = \hat{S}_- |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)}\,|1/2, -1/2\rangle = |1/2, -1/2\rangle = |\downarrow\rangle\\
&\hat{S}_- |\downarrow\rangle = \hat{S}_- |1/2, -1/2\rangle = \sqrt{1/2(1/2+1) - (-1/2)(-1/2-1)}\,|1/2, -3/2\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

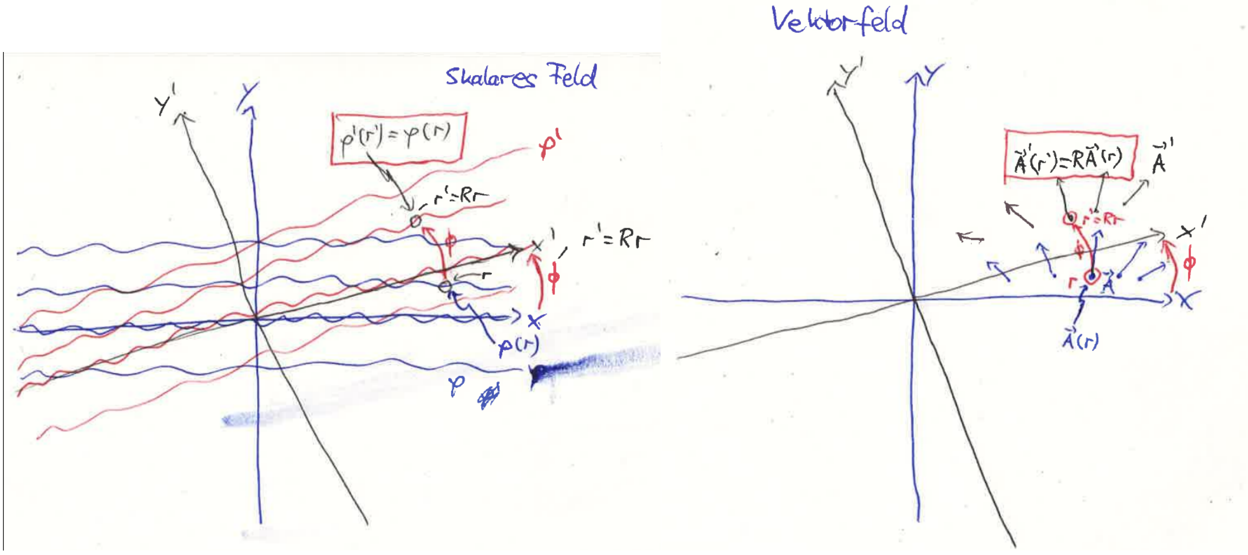

Abbildung 1: Zunächst betrachten wir das skalare Feld. Das ursprüngliche skalare Feld φ, dargestellt durch die blauen Wellenlinien, wird nach der Rotation zu dem roten Feld φ'. Wird ebenfalls das Koordinatensystem gedreht, gehen die Achsen $\{x, y\}$ über in die Achsen $\{x', y'\}$. Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt r und seinen rotierten Bruder $r' = Rr$, sieht man, dass die Felder $\{\varphi, \varphi'\}$ an den jeweilgen Punkten denselben Wert haben müssen, das heisst $\varphi'(r') = \varphi(r)$. Betrachten wir nun ein Vektorfeld. In blau dargestellt ist das Vektorfeld $\vec{A}$, und in schwarz das rotierte Feld $\vec{A}'$. Mit derselben Überlegung wie links, sehen wir, dass $\vec{A}'(r')$ und $\vec{A}(r)$ zwar betragsmässig übereinstimmen, der Vektor zeigt jedoch in eine andere Richtung. Gleichheit erhält man, wenn man den ursprünglichen Vektor noch zusätzlich dreht, d.h. $\vec{A}'(r') = R\vec{A}(r)$.

2. Spindrehungen und unitäre Matrizen (4 Punkte, mündlich)

Machen wir uns zunächst einmal die angegebenen Transformationsvorschriften klar. Die obere Zeile wird in Abbildung 1 erklärt. Die unteren Zeilen ergeben sich daraus aus folgender einfacher Rechnung. (Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die unteren Zeilen nicht notwendig; die dienen eher für die Studenten um Formeln aus dem Skript wiederzufinden.) Für jede skalare Komponente kann man eine Entwicklung der Art ($\delta r = \delta\phi \times r$)

$$\begin{aligned}
\varphi'(r' = Rr) =& C\varphi(r) \\
\rightarrow \quad \varphi'(r) =& C\varphi(R^{-1}r) \approx C\varphi(r - \delta r) \approx C\left[\varphi(r) - \delta r\, \nabla\varphi(r)\right] = C\left[\varphi(r) - (\delta\phi \times r)\, \nabla\varphi(r)\right] \\
=& C\left[\varphi(r) - \delta\phi(r \times \nabla)\, \varphi(r)\right] \approx C\, \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\delta\phi \cdot L\right)\varphi(r) \equiv C\, U_L\, \varphi(r)\,.
\end{aligned}$$

(a) (0,5 Punkte)

Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und eine orthogonale Matrix O ($O^T = O^{-1}$) gilt

$$\vec{a}^T O\vec{b} = (\vec{a}^T O\vec{b})^T = \vec{b}^T O^T \vec{a} = \vec{b}^T O^{-1}\vec{a}\,.$$

Wegen der Verwechslungsgefahr bezüglich der Komponenten des SpinVektors lassen wir in den Aufgaben bei den Ausdrücken $\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ das 'tansponiert' lieber weg.

(b) (0,5 Punkte)

Für die skalare Wahrscheinlichkeitsdichte gilt offenbar $\rho'(r') = \rho(r)$, und somit

$$\begin{aligned}
\rho'(r') =& {\psi'}^\dagger(r')\, \psi'(r') = (U_S\psi(r))^\dagger\, U_S\psi(r) = \psi(r)^\dagger\, U_S^\dagger\, U_S\psi(r) \stackrel{!}{=} \psi(r)^\dagger\, \psi(r) \\
\rightarrow \qquad U_S^\dagger =& U_S^{-1}\,.
\end{aligned}$$

(c) (1,5 Punkte)

Für diese Aufgabe verwenden wir die Transformation $\psi(r) = U_S^{-1}\psi'(r')$ des Spinors und $\vec{B}(r) = R^{-1}\vec{B}'(r')$ des Magnetfeldes. (Siehe Aufgabenblatt.) Damit schreiben wir den für den Spin interessanten Teil der PauliGleichung um zu (das Vorgehen ist identisch zur Bestimmung der Transformationsmatrix S in der DiracTheorie.)

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t U_S^{-1}\psi'(r') =& \mu_B \overbrace{\vec{\sigma}\cdot R^{-1}\vec{B}'(r')}^{R\vec{\sigma}\cdot\vec{B}'(r')\text{ [mit a)]}} \; U_S^{-1}\psi'(r') \\
i\hbar\partial_t \psi'(r') =& \mu_B \underbrace{U_S\, R\vec{\sigma}\, U_S^{-1}}_{\overset{!}{=}\vec{\sigma}} \cdot\vec{B}'(r')\,\psi'(r')\;.
\end{aligned}
$$

Da U_S und $\vec{B}$ in verschiedenen Räumen 'leben', können wir diese problemlos vertauschen. Damit die PauliGleichung auch in den neuen Koordinaten die gleiche Form hat, muss eben gelten

$$
\begin{aligned}
U_S\, R\vec{\sigma}\, U_S^{-1} =& \vec{\sigma} \\
\rightarrow \qquad R\vec{\sigma} =& U_S^{\dagger}\vec{\sigma}U_S
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(d) (1,5 Punkte)

Verwenden wir nun den Ansatz $U_S = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{a}\right) \approx 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{a}$ und $R\vec{\sigma} \approx \vec{\sigma} + \vec{\phi}\times\vec{\sigma}$, so wird Gleichung (12) zu

$$
(1 + \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{a})\sigma_i(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{a}) \approx \sigma_i + \frac{i}{\hbar}(\phi_j a_j\sigma_i - \sigma_i\phi_j a_j) = \sigma_i + \frac{i}{\hbar}\phi_j\;[a_j,\sigma_i] \overset{!}{=} \sigma_i + \epsilon_{ijk}\phi_j\sigma_k\;.
$$

Da die Gleichung für alle ϕ_j erfüllt sein muss, muss gelten $[\sigma_i, a_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\sigma_k$. (An dieser Stelle werden Studenten womöglich schon schlussfolgern, dass $a_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$. Das sollte okay sein. Wir gehen hier dennoch etwas akribischer vor.) Jede 2×2 Matrix kann durch PauliMatrizen ausgedrückt werden

$$
a_j = \alpha_{jm}\sigma_m + \beta_m 1\;.
$$

α und β sind numerische, zu bestimmende Vorfaktoren. Wir können $\beta_m = 0$ annehmen, da dies nur eine globale Phasenänderung, jedoch keine Drehung verursachen würde. Also erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\alpha_{jm}\,[\sigma_i,\sigma_m] =& i\hbar\epsilon_{ijk}\sigma_k \\
\alpha_{jm}2i\epsilon_{imk}\sigma_k =& i\hbar\epsilon_{ijk}\sigma_k\;.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $\alpha_{jm} = \frac{\hbar}{2}\delta_{jm}$. Somit erhält man $a_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j = S_j$, und schliesslich den Spindrehoperator $U_S = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)$.

3. Spin im Magnetfeld (3 Punkte, mündlich)

(a) (1,5 Punkte)

Wir schreiben den Zeitentwicklungsoperator um als $U(t) = \exp\left(-i\,\frac{t}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}\right)$ und definieren somit die Matrix

$$
M = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix}\;.
$$

Da das Quadrat der Matrix $M^2 = \frac{\vec{\omega}^2}{4}\,\mathbb{1}_2 \equiv \frac{\omega_0^2}{4}\,\mathbb{1}_2$ können wir U schreiben als

$$
\begin{aligned}
U(t) = \exp(-iMt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} M^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2n}}{(2n)!} \underbrace{M^{2n}}_{\mathbb{1}_2\,(\omega_0^2/4)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2n+1}}{(2n+1)!} \underbrace{M^{2n+1}}_{M\,(\omega_0^2/4)^n} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t\frac{\omega_0}{2})^{2n}}{(2n)!}}_{\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} \mathbb{1}_2 - iM\frac{2}{\omega_0} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t\frac{\omega_0}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \mathbb{1}_2 - i\frac{2}{\omega_0} M \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

(b) (1,5 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\psi_\uparrow(0)\rangle \equiv |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Offensichtlich berechnen wir die gewünschten Wahrscheinlichkeiten durch ($s = \{\uparrow, \downarrow\}$)

$$
P_{s\uparrow}(t) = |\langle s|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle s|U(t)|\uparrow\rangle|^2 .
$$

Das heisst, wir benötigen die U-Matrixelemente links oben und links unten,

$$
\begin{aligned}
\langle \uparrow |U(t)| \uparrow\rangle &= \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - i\frac{\omega_z}{\omega_0} \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \\
\langle \downarrow |U(t)| \uparrow\rangle &= -\, i\frac{\omega_x + i\omega_y}{\omega_0} \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

Für die Wahrscheinlichkeiten erhalten wir

$$
\begin{aligned}
P_{\uparrow\uparrow}(t) = |\langle \uparrow |U(t)| \uparrow\rangle|^2 &= \cos^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) + \frac{\omega_z^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) = 1 + \frac{\omega_z^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \\
&= 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) , \\
P_{\downarrow\uparrow}(t) = |\langle \downarrow |U(t)| \uparrow\rangle|^2 &= \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

Zusammen ergeben die beiden Wahrscheinlichkeiten 1, da sich das Teilchen eben in einem der beiden Zustände befinden muss. In der Vorlesung wurde der Fall $\vec{\omega} = \omega_z \hat{e}_z$ besprochen (als kleine Information, was die Studenten bereits wissen sollten.).