Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN
MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

Blatt 9
Abgabe: 26.06.2017, 12:00h; Bespr.: 28.06.2017

1. Quiz Nr. 3 (10 Punkte)

2. Drehimpulsaddition (4 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 1$ und Spin $s = \frac{1}{2}$, dessen Zustände sich als Produktzustände in der Basis $|lm_l, sm_s\rangle = |l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ der Operatoren $\hat{L}_z, \hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{s}_z, \hat{\mathbf{s}}^2$ darstellen lassen. Bestimmen Sie die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{s}}$, dessen Eigenbasis $|jm_j, ls\rangle$ durch Eigenzustände der Operatoren $\hat{J}_z, \hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{\mathbf{s}}^2, \hat{\mathbf{L}}^2$ gegeben ist.

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Komponenten des Gesamtdrehimpulses ebenfalls eine Drehimpulsalgebra

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$$

erfüllen...

b) ...und dass daraus entsprechende Vertauschungsrelationen der Operatoren $\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z, \hat{\mathbf{s}}^2$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ zur Konstruktion der Eigenzustände folgen. Was ist der maximale und minimale Eigenwert von $\hat{J}_z$?

c) Konstruieren Sie mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{J}_\pm$ die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses, indem Sie diese sukzessiv auf Zustände mit maximalem oder minimalem Drehimpuls wirken lassen. Die so bestimmten Matrixelement $U_{m_l m_s}^{j m_j} = \langle lm_l, sm_s | jm_j, ls \rangle$ der unitären Transformation $|jm_j, ls\rangle = \sum_{m_l m_s} U_{m_l m_s}^{j m_j} |lm_l, sm_s\rangle$ werden als *Clebsch-Gordon-Koeffizienten* bezeichnet.

Hinweis: Die Wirkung von Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{A}_\pm$ auf einen Eigenzustand von $\hat{A}_z$ und $\hat{\mathbf{A}}^2$ mit $[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{A}_k$ ist gegeben durch

$$\hat{A}_\pm |a, m_a\rangle = \hbar\sqrt{a(a+1) - m_a(m_a \pm 1)} |a, m_a \pm 1\rangle.$$

3. Lokale Eichtransformation (4 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie Wellenfunktionen unter lokaler Eichtransformation

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t).$$

a) Zeigen Sie, dass der Stromoperator für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2$$

mit elektromagnetischem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass der Stromoperator invariant unter lokaler Eichtransformation ist.