**Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17**

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

**Blatt 9**
**Abgabe: 26.06.2017, 12:00h; Bespr.: 28.06.2017**

---

## 1. Quiz (10 Punkte, schriftlich)

a) (2 Punkte) Der Hamiltonoperator in zweidimensionaler Spinbasis $|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)^{\mathbf{T}}$ ist gegeben durch

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \mu_B B & \\ & -\mu_B B \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit den Energieeigenwert $E_\uparrow = \mu_B B$ zu messen ist

$$P_\uparrow(t=0) = |\langle\uparrow|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Ähnliches gilt für die Wahrscheinlichkeit $E_\downarrow = -\mu_B B$ zu messen:

$$P_\downarrow(t=0) = |\langle\downarrow|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Daraus ergibt sich $\langle H\rangle = 0$. Das lässt sich aber auch über den herkömmlichen Weg herleiten:

$$\langle H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & , -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_B B & \\ & -\mu_B B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\mu_B B - \mu_B B) = 0$$

Die Standardabweichung ist gegeben durch $\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$. Mit $H^2 = (\mu_B B)^2 \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ die $2\times 2$ Einheitsmatrix ist, ergibt sich

$$\langle H^2\rangle = \mu_B^2 B^2$$

Somit ergibt sich für die Standardabweichung

$$\Delta H = \mu_B B$$

b) (2 Punkte) Der angegebene Zustand ist Eigenzustand des Messoperators

$$\hat{S}_x|\psi(0)\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\psi(0)\rangle$$

Somit wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 der Zustand $\langle\hat{S}_x\rangle = -\frac{\hbar}{2}$ gemessen. Das System befindet sich deswegen auch nach der Messung weiterhin in diesem Zustand.

c) (3 Punkte) Der Zeitentwicklungsoperator in der Diagonalbasis des Hamiltonians lautet

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\mu_B B}{\hbar}t} & \\ & e^{\frac{i\mu_B B}{\hbar}t} \end{pmatrix}$$

Somit gilt für einen beliebigen Zustand

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-\frac{i\mu_B B}{\hbar}t}|\uparrow\rangle + \beta e^{\frac{i\mu_B B}{\hbar}t}|\downarrow\rangle$$

wobei die Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$ durch den Zustand bei $t = 0$, also durch $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, gegeben sind.

d) (3 Punkte) Für den Erwartungswert des Operators $\hat{S}_x$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_x \rangle(t) &= \langle \psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\mu_B B}{\hbar}t} \quad , -e^{-\frac{i\mu_B B}{\hbar}t}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{i\mu_B B}{\hbar}t}\\ -e^{\frac{i\mu_B B}{\hbar}t}\end{pmatrix} \\
&= -\frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{2\mu_B B}{\hbar}t} \quad + e^{-i\frac{2\mu_B B}{\hbar}t}\right) \\
&= -\frac{\hbar}{2}\cos\left(\frac{2\mu_B B}{\hbar}t\right)
\end{aligned}$$

**2. Drehimpulsaddition (4 Punkte, schriftlich)**

a) (1 Punkt) Für die Komponenten des Gesamtdrehimpulses gilt

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = [\hat{L}_i + \hat{s}_i, \hat{L}_j + \hat{s}_i] = [\hat{L}_i, \hat{L}_j] + [\hat{s}_i, \hat{s}_i] = i\hbar\epsilon_{ijk}(\hat{L}_k + \hat{s}_k) = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{1}$$

b) (1 Punkt) Daraus folgt, dass

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z] = [\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2, \hat{J}_z] = i\hbar\left(\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_y\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{J}_y\right) = 0$$

und

$$[\hat{J}_i, \hat{\mathbf{s}}^2] = [\hat{L}_i + \hat{s}_i, \hat{\mathbf{s}}^2] = 0$$

und

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{s}}^2] = [\hat{\mathbf{L}}^2 + 2\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}}^2, \hat{\mathbf{s}}^2] = 0$$

wobei verwendet wurde, dass $[\hat{\mathbf{s}}^2, \hat{s}_z] = 0$. Die letzten beiden Identitäten gelten analog für den Bahndrehimpuls $\hat{\mathbf{L}}$. Somit lassen sich simultane Eigenzustände der Operatoren $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_z$ , $\hat{\mathbf{s}}^2$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ konstruieren. Des Weiteren nehmen die Eigenwerte von $\hat{J}_z$ auf Grund von Gl. 1 wieder ganz- oder halbzahlige Werte an, wobei die die maximalen und minimalen Gesamtdrehimpulswerte durch

$$\begin{aligned}
m_{j,\max} &= m_{l,\max} + m_{s,\max} \\
m_{j,\min} &= m_{l,\min} + m_{s,\min}
\end{aligned}$$

gegeben sind.

b) (2 Punkte) Die Auf- und Absteigeoperatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+ &= \hat{J}_x + i\hat{J}_y \\
\hat{J}_- &= \hat{J}_x - i\hat{J}_y
\end{aligned}$$

Deren Wirkung auf Eigenzustände von $\hat{J}_z$ und $\hat{\mathbf{J}}^2$ ist

$$\hat{J}_\pm|j, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m_j\,(m_j \pm 1)}\,|j, m_j \pm 1\rangle$$

Für Zustände mit minimalem Drehimpuls[1] ist $m_{j,\min} = m_{l,\min} + m_{s,\min} = -j = -l - s = -\frac{3}{2}$. In beiden Basen korrespondiert hierzu jeweils nur ein Zustand. Somit ist das Matrixelement $\langle \frac{3}{2} - \frac{3}{2}, 1\frac{1}{2}|1 - 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = 1$ und dementsprechend

$$|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle = |1 - 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$$

Der Zustand mit Gesamtdrehimpuls $m_j = -\frac{1}{2}$ erhält man durch

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+|\frac{3}{2} - \frac{3}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \left(\hat{L}_+ + \hat{s}_+\right)|1 - 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \\
\Leftrightarrow \sqrt{3}|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2}|10, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + |1 - 1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\
\Leftrightarrow |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|10, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1 - 1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

[1] Die analoge Diskussion gilt natürlich auch für den maximalen Drehimpuls wobei hier der Absteigeoperator verwendet wird.

Der Zustand mit $m_j = \frac{1}{2}$ ist

$$
\begin{aligned}
\hat{J}_+|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \left(\hat{L}_+ + \hat{s}_+\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|10, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1-1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\right) \\
\Leftrightarrow 2|\frac{3}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}}|11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|10, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|10, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\
\Leftrightarrow |\frac{3}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|10, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

Der Zustand mit $m_j = \frac{3}{2}$ ist der Zustand mit maximalem Drehimpuls. Das gibt natürlich

$$
\begin{aligned}
\hat{J}_+|\frac{3}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \left(\hat{L}_+ + \hat{s}_+\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|10, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\right) \\
\Leftrightarrow \sqrt{3}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)|11, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \\
\Leftrightarrow |\frac{3}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle &= |11, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

Zusätzlich zu den Zuständen mit $j = \frac{3}{2}$ lassen sich Zustände mit $j = \frac{1}{2}$ konstruieren. Diese Zustände besitzen $m_j = \pm\frac{1}{2}$ und lassen sich über ihre Orthogonalität zu den Zuständen $|\frac{3}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle$ und $|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle$ finden: $\langle\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}|\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle = 0$. Für $m_j = \frac{1}{2}$ findet man

$$
|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|10, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle
$$

und für $m_j = -\frac{1}{2}$

$$
|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|10, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1-1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle
$$

Dass diese Zustände tatsächlich $j = \frac{1}{2}$ besitzen, lässt sich mit der Wirkung von $\hat{\mathbf{J}}^2$ überprüfen. Somit wurden insgesamt $6 = 3 \times 2$ Zustände gefunden, welches der Dimensionalität des Hilbertraums aufgespannt durch die Drehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{L}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$ entspricht.

## 3. Lokale Eichtransformation (4 Punkte, mündlich)

a) (2 Punkte) Die Divergenz des Stromoperators ist

$$
\begin{aligned}
\nabla\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hbar}{2im}\nabla\left(\psi^*\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\,\psi\right) - \frac{e}{mc}\nabla\left(\mathbf{A}|\psi|^2\right) \\
&= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \left(\nabla^2\psi^*\right)\psi\right) - \frac{e}{mc}(\nabla\mathbf{A})\,|\psi|^2 - \frac{e}{mc}\mathbf{A}\left((\nabla\psi^*)\,\psi + \psi^*\nabla\psi\right)
\end{aligned}
$$

Die Ableitung der Dichte nach der Zeit ergibt sich mit der Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ zu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, t) &= \psi^*\partial_t\psi + (\partial_t\psi^*)\,\psi \\
&= \frac{1}{i\hbar}\left(\psi^* H\psi - (H\psi)^*\,\psi\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

wobei $\partial_t\psi^* = \left(\frac{1}{i\hbar}H\psi\right)^* = -\frac{1}{i\hbar}(H\psi)^*$ verwendet wurde. Die Wirkung des Hamiltonoperators auf die Wellenfunktion ist

$$
\begin{aligned}
H\psi &= \left(\frac{\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + V\right)\psi \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{2i\hbar e}{2mc}\mathbf{A}(\nabla\psi) + \frac{i\hbar e}{2mc}(\nabla\mathbf{A})\,\psi + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2\psi + V\psi \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in Gl. 1 ergibt das

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho &= -\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \left(\nabla^2\psi^*\right)\psi\right) + \frac{e}{mc}\mathbf{A}\left(\left(\nabla\psi\right)\psi^* + \psi\nabla\psi^*\right) + \frac{e}{mc}\left(\nabla\mathbf{A}\right)\psi\psi^* \\ &= -\nabla\mathbf{j}\end{aligned}$$

die Kontinuitätsgleichung. Die beiden letzten Terme von Gl. 3 entfallen auf Grund der Asymmetrie von Gl. 2.

b) (2 Punkte) Das Vektorpotential transformiert unter Eichtransformation wie

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r},t)$$

Damit ergibt sich für den transformierten Stromoperator

$$\begin{aligned}\mathbf{j}' &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi'^*\nabla\psi' - \left(\nabla\psi'^*\right)\psi'\right) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}'|\psi'|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\nabla\left(\psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\right) - \left(\nabla\left(\psi^* e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\right)\right)\psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\right) - \frac{e}{mc}\left(\mathbf{A} + \nabla\Lambda\right)|\psi|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \left(\nabla\psi^*\right)\psi\right) + 2\frac{\hbar}{2im}\frac{ie}{\hbar c}\left(\nabla\Lambda\right)|\psi|^2 - \frac{e}{mc}\left(\mathbf{A} + \nabla\Lambda\right)|\psi|^2 \\ &= \mathbf{j}\end{aligned}$$

der somit mit der Dichte $\rho$ invariant unter lokaler Eichtransformation ist.