

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 10

MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

Abgabe: 03.07.2017, 12:00h, Bespr.: 05.07.2017

1. Teilchen im Magnetfeld - Landau-Niveaus (3,5 Punkte, schriftlich)

In der Vorlesung haben Sie bereits die Landau-Niveaus mittels einer algebraisch geschickten Methode kennengelernt. In dieser Aufgabe soll das Problem in der Standard ‘Fußgänger-Methode’ angegangen werden. Betrachtet wird ein Teilchen der Ladung q in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. Eine geschickte Wahl des Vektorpotentials \mathbf{A} ist in diesem Fall durch die Landau-Eichung mit $\mathbf{A} = -By\hat{e}_x$ gegeben. Angenommen das Teilchen sei (wie bei einem zweidimensionalen Elektronengas) auf die $x - y$ -Ebene eingeschränkt, so lautet der Hamilton-Operator des Problems

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(\left(\hat{p}_x + \frac{q}{c} B \hat{y} \right)^2 + \hat{p}_y^2 \right).$$

- Zeigen Sie $[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0$, und nutzen Sie das Wissen um die Eigenfunktionen von \hat{p}_x , um einen Separationsansatz für die Wellenfunktion $\psi(x, y)$ zu machen.
- Bringen Sie die Schrödinger-Gleichung damit auf die Form eines eindimensionalen harmonischen Oszillators, und geben Sie die charakteristische Frequenz ω_c der Eigenenergien $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$ an ($n \geq 0$).
- Geben Sie nun die dazugehörigen Eigenfunktionen $\psi_{n,p_x}(x, y)$ an. Führen Sie die magnetische Längenskala $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}}$ ein.

Offenbar hängen die Eigenfunktionen von der Quantenzahl p_x ab, die Energien jedoch nicht. Somit sind die Landau-Energieniveaus stark entartet. Diese Entartung spielt für physikalische Anwendungen eine wichtige Rolle (z.B. deHaas-vanAlphen-Effekt). Wir wollen diese Entartungen nun für eine Probe der Abmessung $A = L_x L_y$ bestimmen.

- Bestimmen Sie die Quantisierung von p_x und p_y , unter Annahme periodischer Randbedingungen $\psi(x + L_x, y) = \psi(x, y)$, $\psi(x, y + L_y) = \psi(x, y)$. Geben Sie auch den Abstand $\Delta p_x = p_{x,n_x+1} - p_{x,n_x}$ zweier Impulswerte an.
Tip : Führen Sie dazu eine diskrete Fouriertransformation $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \sum_{p_x} e^{-ip_x x/\hbar} \varphi_{p_x}$ durch.
- Eine Einschränkung der zugelassenen Werte von p_x findet man durch die Bedingungen, dass die Verschiebung des Potentialminimums $y_0 = \frac{cp_x}{qB}$ innerhalb der Ausmasse der Probe liegen muss, d.h. $0 < y_0 < L_y$. Bestimmen Sie daraus die Länge des zugelassenen Impulsintervalls I_{p_x} , und die Anzahl $N = I_{p_x}/\Delta p_x$ (=Entartungsgrad eines jeden Landau-Niveaus) der darin befindlichen diskreten Impulswerten.

2. Wasserstoffatom (4 Punkte, mündlich)

In der Vorlesung wurde das Wasserstoffproblem gelöst. In dieser Aufgabe wollen wir das Bohr'sche Korrespondenzprinzip erläutern, d.h. für große Quantenzahlen n geht das Wasserstoffatom in den klassischen Limes über. Die Wasserstoffwellenfunktion lautet

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

mit den normierten Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$. Die radiale Funktion lautet (a ist der Bohr-Radius)

$$R_{n,l}(r) = C_{n,l} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

mit der Normierungskonstante

$$C_{n,l} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}.$$

Die Laguerre-Polynome (,sowie die zugeordneten) sind definiert über $L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$ und $L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns durchweg auf Zustände mit der Drehimpulsquantenzahl $l = n - 1$.

- Zeigen Sie, dass $L_0^p(x) = p!$, und dass damit $R_{n,n-1}(r) = N_n r^{n-1} e^{-\frac{r}{na}}$ mit $N_n = \left(\frac{2}{na}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}}$ gilt.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r \rangle$ für die Zustände $\psi_{n,n-1,m}$, und zeigen Sie, dass im Grundzustand $\langle r \rangle = \frac{3}{2}a$.
Tipp: Sie können das Integral $\int_0^\infty dx x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}$ mit $a > 0, n \in \mathbb{N}$ benutzen.
- Zeigen Sie nun, dass die Unschärfe in r in solchen Zuständen $\sigma_r \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \frac{\langle r \rangle}{\sqrt{2n+1}}$ beträgt. Die relative Unschärfe nimmt also mit steigender Quantenzahl n ab.

Nun führen wir die klassische Rechnung durch. Ein Elektron bewegt sich in dem Potential (Weiterhin sei $l = n - 1$.)

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2}.$$

- Berechnen Sie den klassischen Radius r_{kl} , den ein Elektron einnehmen würde, und zeigen Sie, dass r_{kl} für $n \gg 1$ mit dem quantenmechanischen $\langle r \rangle$ (aus b)) übereinstimmt.

3. Teilchen im Zentralpotential (2,5 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein Teilchen in dem Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{\gamma}{r^2}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie für dieses Potential die Eigenenergien des Teilchens.

Tipp: Das Problem ist dem in der Vorlesung behandelten Wasserstoffatom ($\gamma = 0$) sehr ähnlich und kann analog gelöst werden. Eine geschickte Substitution von $l(l+1)$ erspart viel Arbeit.