

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN  
MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

Blatt 10 (Lösung)  
Abgabe: 03.07.2017, 12:00h, Bespr.: 05.07.2017

1. Teilchen im Magnetfeld - Landau-Niveaus (3,5 Punkte, schriftlich)

Der Hamilton-Operator des Problems lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left( \left( \hat{p}_x + \frac{q}{c} B \hat{y} \right)^2 + \hat{p}_y^2 \right).$$

- (a) (0,5 Punkte) Wir berechnen explizit Zu zeigen, dass  $[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0$  ist trivial, da  $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$ . Also machen wir den Ansatz  $\psi(x, y) = e^{ip_x x/\hbar} \chi(y)$ .
- (b) (1 Punkt) Eingesetzt in die Schrödinger-Gleichung ergibt sich sofort

$$\left[ \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \left( \frac{qB}{mc} \right)^2 \left( y + \frac{cp_x}{qB} \right)^2 \right] \chi(y) = E \chi(y).$$

Führen wir nun die charakteristische Frequenz  $\omega_c = \frac{qB}{mc}$ , und die Verschiebung  $y_0 = \frac{cp_x}{qB}$  ein, und zudem einen VariablenShift durch  $\tilde{y} = y + y_0$ ,  $\hat{p}_y = \hat{p}_{\tilde{y}}$ , erhalten wir

$$\left[ \frac{\hat{p}_{\tilde{y}}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \tilde{y}^2 \right] \underbrace{\chi(\tilde{y} - y_0)}_{\equiv \tilde{\chi}(\tilde{y})} = E \chi(\tilde{y} - y_0).$$

Hier haben wir also einen harmonischen Oszillator mit den Energien  $E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$ , und den Eigenfunktionen des harm. Oszillators

$$\tilde{\chi}(\tilde{y}) = \left( \frac{m\omega_c}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}} \tilde{y} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega_c}{\hbar} \tilde{y}^2}.$$

- (c) (0,5 Punkte) Es gilt  $\chi(y) = \tilde{\chi}(y + y_0)$ . Mit der magnetischen Längenskala  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}}$  können wir die Eigenfunktionen schreiben als

$$\begin{aligned} \psi_{n,p_x}(x, y) &= e^{ip_x x/\hbar} \chi(y) = e^{ip_x x/\hbar} \tilde{\chi}(y + y_0) \\ &= e^{ip_x x/\hbar} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{l_B} \sqrt{2^n n!}} H_n \left( \frac{y + y_0}{l_B} \right) e^{-\frac{(y+y_0)^2}{2l_B^2}}. \end{aligned}$$

- (d) (0,5 Punkte) Um die Quantisierung unter periodischen Randbedingungen zu bestimmen machen wir also die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{L_x}} \sum_{p_x} e^{-ip_x x/\hbar} \psi_{p_x}(y) \stackrel{!}{=} \psi(x + L_x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \sum_{p_x} e^{-ip_x(x+L_x)/\hbar} \psi_{p_x}(y) \\ &\rightarrow p_x L_x = 2\pi\hbar n_x \quad (n_x = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}) \\ &\quad p_x = \frac{2\pi\hbar}{L_x} n_x. \end{aligned}$$

Analog findet man  $p_y = \frac{2\pi\hbar}{L_y} n_y$ . Der Abstand zweier Impulswerte beträgt also  $\Delta p_x = \frac{2\pi\hbar}{L_x}$ .

- (e) (1 Punkt) Nun fordern wir, dass das Potentialminimum innerhalb der Probe liegt  $0 < y_0 < L_y$  und erhalten damit die Einschränkung für  $p_x$ ,  $0 < p_x < \frac{qBL_y}{c}$ . Damit ist die Länge des zugelassenen Impulsintervalls  $I_{p_x} = \frac{qBL_y}{c}$ , und damit erhalten wir für die Anzahl der darin befindlichen Zustände

$$N = \frac{I_{p_x}}{\Delta p_x} = \frac{\frac{qBL_y}{c}}{\frac{2\pi\hbar}{L_x}} = \frac{qBA}{2\pi\hbar c}.$$

Mit der Ladung  $q = ne$ , dem magn. Fluss  $\phi = BA$  und dem magn. Flussquant  $\phi_0 = \frac{hc}{e}$  kann man das auch schick schreiben als  $N = n \frac{\phi}{\phi_0}$ .

Anmerkung: Quasiklassisch kann man die Landau-Quantisierung und deren Entartung auch so verstehen. Wegen des angelegten Magnetfeldes werden Elektronen auf quantisierte Kreisbahnen gezwungen. Im zweidimensionalen k-Raum heisst das, dass die gleichverteilten Gitterpunkte in Kreise 'kondensieren'. Offenbar 'kondensieren' in jeden Kreis genau gleich viele Gitterpunkte (,da die Entartung nicht vom Energieniveau  $n$  abhängt.).

## 2. Wasserstoffatom (4 Punkte, mündlich)

- (a) (1 Punkt) Per Definition lautet  $L_0^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_p(x)$ . Da das Polynom  $L_p(x)$  genau von der Ordnung  $p$  ist, trägt nur der Koeffizient der Potenz  $x^p$  bei. Schreiben wir also  $L_p(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^p (e^{-x} x^p) = (-1)^p x^p + \mathcal{O}(x^{p-1})$ , ergibt sich automatisch  $L_0^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_p(x) = (-1)^{2p} p! = p!$ .

Damit schreiben wir nun  $R_{n,n-1}(r) = N_n r^{n-1} e^{-\frac{r}{na}}$  mit

$$N_n = C_{n,n-1} \left(\frac{2}{na}\right)^{n-1} L_0^{2n-1} \left(\frac{2r}{na}\right) = \left(\frac{2}{na}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{(2n-1)!}{[(2n-1)!]^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2}{na}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}}.$$

- (b) (1 Punkt) Bei der Berechnung des Erwartungswert beachten wir zunächst, dass die Kugelflächenfunktionen normiert sind, d.h.  $\int d\phi \int d\theta \sin\theta |Y_l^m(\theta, \phi)| = 1$ . Für den Erwartungswert erhalten wir damit

$$\langle r \rangle = N_n^2 \int_0^\infty dr r^3 r^{2n-2} e^{-\frac{2r}{na}} = \left(\frac{2}{na}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n)!} \frac{(2n+1)!}{\left(\frac{2}{na}\right)^{2n+2}} = a n \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Hier haben wir das angegebene Integral auf dem Arbeitsblatt verwendet. Für den Grundzustand ( $n = 1$ ) erhält man  $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a$ .

- (c) (1 Punkt) Zunächst benötigen wir noch

$$\langle r^2 \rangle = N_n^2 \int_0^\infty dr r^4 r^{2n-2} e^{-\frac{2r}{na}} = \left(\frac{2}{na}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{\left(\frac{2}{na}\right)^{2n+3}} = (an)^2 (n+1) \left(n + \frac{1}{2}\right) = \langle r \rangle^2 \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Schliesslich ergibt sich die Unschärfe zu  $\sigma_r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \langle r \rangle \sqrt{\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{n+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\langle r \rangle}{\sqrt{2n+1}}$ .

Die relative Unschärfe nimmt also mit steigendem  $n$  ab. Als Beispiel: Für  $n = 1$  liegt der Erw.wert des Radius bei  $\langle r \rangle = \frac{3}{2} a$  und die Unschärfe bei  $\sigma_r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ . Die Unschärfe liegt also in der gleichen Grössenordnung wie der Radius der 'Bahn'. Für  $n = 100$  sieht das anders aus. Hier haben wir einen Radius  $\langle r \rangle \approx 10000a$  mit einer Unschärfe von  $\sigma_r \approx \frac{10000a}{10\sqrt{2}}$ ; also bereits eine Grössenordnung kleiner als der Radius. Das heisst, je grösser  $n$ , desto eher sehen die Orbits auch wie klassische Kreisbahnen aus.

(d) (1 Punkt) In der klassischen Rechnung finden wir den Radius über

$$\frac{dV}{dr} = \frac{e^2}{r^2} - \frac{1}{m} \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow r_{kl} = \underbrace{\frac{\hbar^2}{me^2}}_{\equiv a} l(l+1) = a n(n-1).$$

Für grosse Quantenzahlen  $n \gg 1$  stimmen also klassischer und quantenmechanischer Radius überein,  $\langle r \rangle = r_{kl} = a n^2$ .

### 3. Teilchen im Zentralpotential (2,5 Punkte, mündlich)

Die Rechnung zum Wasserstoffatom kann im Skript nachvollzogen werden. Alles was sich hier ändert ist die Schrödinger Gleichung des Radialteils, und zwar

$$\left( -\partial_r^2 + \frac{l(l+1) + \frac{2m\gamma}{\hbar^2}}{r^2} - \frac{2m e^2}{\hbar^2 r} - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) u(r) = 0.$$

Machen wir die Substitution  $\tilde{l}(\tilde{l}+1) = l(l+1) + \frac{2m\gamma}{\hbar^2}$ , können wir in der Wasserstoffrechnung weit nach vorne springen. Gehen wir zur Rekursionsformel des Potenzreihenansatzes

$$C_{i+1} = \frac{i + \tilde{l} + 1 - n}{(i+1)(i + 2\tilde{l} + 2)} C_i.$$

Auch hier muss die Reihe abbrechen damit die Wellenfunktion nicht divergiert. Es muss also für ein  $i_{max}$  gelten

$$i_{max} + \tilde{l} + 1 - n \stackrel{!}{=} 0.$$

Da hier  $\tilde{l}$  im Gegensatz zum reinen Wasserstoffproblem nicht einfach ganzzahlig ist, ist die Bedingung nicht einfach dadurch erfüllt, dass  $n$  ganzzahlig und  $n \geq l+1$  ist. Viel eher muss die Kombination  $p \equiv n - 1 - \tilde{l}$  ganzzahlig sein ( $p = \{1, 2, 3, \dots\}$ ), und dient damit als von  $l$  unabhängige (da  $n$  beliebig) neue Quantenzahl. Berechnen wir  $\tilde{l}$ , so ergibt sich (wir werfen die negative Lösung direkt)

$$\tilde{l}_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1) + \frac{2m\gamma}{\hbar^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8m\gamma}{\hbar^2}} \right).$$

Letztlich erhalten wir für die Energie

$$E_{p,l} = -\frac{R_0}{n^2} = -R_0 [p+1+\tilde{l}]^{-2}$$

$$= -4R_0 \left[ 2p+1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8m\gamma}{\hbar^2}} \right]^{-2}.$$

Die Energie hängt nun von 2 Quantenzahlen ab. Insbesondere hängt sie von  $l$  ab, d.h. die zufällige Entartung beim reinen Wasserstoffatom ist aufgehoben.