Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 11
Abgabe: 10.07.2017, 12:00h; Bespr.: 12.07.2017

---

1. Anharmonischer Oszillator (3 Punkte, schriftlich)

Betrachten Sie einen anharmonischen Oszillator der Form

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \alpha\hat{x}^4$$

wobei der dritte Terms als Störung betrachtet werden kann $\alpha x_0^4 \ll \hbar\omega$. Hier ist $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die charakteristische Längenskala des ungestörten Problems. Für $\alpha = 0$ ist das Problem exakt lösbar, wobei die Energien der Zustände $\{|n\rangle\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind durch $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Es wurde gezeigt, dass sich Auf- und Absteigeoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right] \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right] \end{aligned}$$

konstruieren lassen, deren Wirkung auf Zustände gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned}$$

Die erste Korrektur zur Zustandsenergie ist

$$E_n^{(1)} = \alpha\langle n|\hat{x}^4|n\rangle.$$

a) Berechnen Sie das Matrixelement $\langle n|\hat{x}^2|n'\rangle$. Zeigen Sie, dass $n' = n, n \pm 2$ gelten muss.

b) Berechnen Sie $E_n^{(1)}$ in erster Ordnung in α.
Hinweis: Der Identitätsoperator ist gegeben durch $\hat{1} = \sum_l |n'\rangle\langle n'|$.

c) Leiten Sie einen Ausdruck für $n = n_{\max}$ her, bei der die Störungstheorie nicht mehr gültig ist. Ein mögliches Kriterium ist

$$E^{(0)}_{n_{\max}} \approx E^{(1)}_{n_{\max}}.$$

2. Variationsprinzip (4 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie den anharmonischen Oszillator wie in der vorherigen Aufgabe angegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Variationsprinzips die Grundzustandsenergie E_g. Machen Sie für die Grundzustandswellenfunktion folgenden Ansatz

$$\psi_{\text{trial}}(x) = Ae^{-\frac{bx^2}{2}}$$

mit den Variationsparametern A und b, wobei sich A über die Normierungsbedingung der Wellenfunktion in Abhängigkeit von b darstellen lässt.

a) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Systems als Funktion von b

$$E(b) = \langle\psi_{\text{trial}}|\hat{H}_0 + \alpha\hat{x}^4|\psi_{\text{trial}}\rangle$$

b) Eine Abschätzung für die Grundzustandsenergie erhält man durch jenes $b = b_{\min}$, das E minimiert, bzw. das die Bedingung

$$\left.\frac{\partial E(b)}{\partial b}\right|_{b=b_{\min}} = 0$$

erfüllt. Leiten Sie eine Gleichung zur Bestimmung von $b_{\min}$ her.

c) Lösen sie die kubische Gleichung für $b_{\rm min}$ in führender Ordnung in α indem Sie den Störungsansatz
$$b_{\rm min} \approx b^{(0)}_{\rm min} + \alpha b^{(1)}_{\rm min} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$
machen.

d) Bestimmen Sie $E_g = E(b_{\rm min})$ in führender Ordnung in α und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der vorherigen Aufgabe.

3. Starker[1] Effekt (3 Punkte, mündlich)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand $n = 1$ in einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\hat{e}_z$. Das Feld kann als Störung betrachtet werden. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$
wobei $\hat{H}_0$ das ungestörte Wasserstoffatom darstellt und $\hat{V} = -eE\hat{z}$ dem Störterm entspricht. Berechnen Sie die Energiekorrektur des Grundzustands in führender Ordnung.

(a) Zeigen Sie, dass die Energiekorrektur in erster Ordnung verschwindet $E_1^{(1)} = 0$. Verwenden Sie hierfür den Paritätsoperator $\hat{\mathcal{P}}$.
Hinweis: Die Eigenzustände des Wasserstoffatoms transformieren wie $\hat{\mathcal{P}}|nlm\rangle = (-1)^l\,|nlm\rangle$, $\hat{z}$ *wie* $\mathcal{P}\hat{z}\mathcal{P}^\dagger = -\hat{z}$. *Zudem gilt* $\hat{\mathcal{P}}^\dagger\hat{\mathcal{P}} = \hat{1}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrixelemente $\langle 100|\hat{z}|nml\rangle$ nur für $l = 1$ und $m = 0$ endlich sind.
Hinweis: z lässt sich durch Kugelflächenfunktionen ausdrücken. Verwenden Sie zudem deren Orthogonalität.

(c) Berechnen Sie die Energiekorrektur in zweiter Ordnung $E_1^{(2)}$ wobei nur Zustände mit $n = 2$ berücksichtigt werden müssen. Zustände mit höheren Anregungsenergien $n \geq 3$ können vernachlässigt werden.

Wichtige Information

- **Übungschein**: Die Anmeldung auf QISPOS (für PO 2010) und CAMPUS (für PO 2015) ist bis zum 23.7.17 freigeschaltet. Bei Interesse bitte Anmelden!
- **1. Klausur**: Die Anmeldung auf QISPOS (für PO 2010) und CAMPUS (für PO 2015) für die 1. Klausur am 30.7.17 ist freigeschaltet. Der An- und Abmeldeschluss ist der 25.07.17. Bei Interesse bitte Anmelden!

  Bei der Klausur sind keine Hilfsmittel erlaubt! Benötigte Formeln werden angegeben, eine allgemeine Formelsammlung ist beigelegt.

[1] Wir wollen auf die Vergangenheit von Johannes Stark im Nationalsozialismus aufmerksam machen. Siehe z.B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Stark`.