Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN
MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

Blatt 12
Abgabe: 17.07.2017, 12:00h, Bespr.: 19.07.2017

Wichtige Information

- **Übungsschein:** Die Anmeldung auf QISPOS (für PO 2010) und CAMPUS (für PO 2015) ist bis zum 23.7.17 freigeschaltet. Bei Interesse bitte Anmelden!
- **1. Klausur:** Die Anmeldung auf QISPOS (für PO 2010) und CAMPUS (für PO 2015) für die 1. Klausur am **31.07.17**¹ ist freigeschaltet. Der An- und Abmeldeschluss ist der 25.07.17. Bei Interesse bitte Anmelden!
Bei der Klausur sind keine Hilfsmittel erlaubt! Benötigte Formeln werden angegeben, eine allgemeine Formelsammlung ist beigelegt.
- **Letztes Tutorium:** In der letzten Vorlesungswoche (Mi, 26.07.) wird es kein Übungsblatt geben. Vielmehr soll in Absprache mit ihrem Tutor eine Fragestunde angeboten werden.

Vorbemerkung: Entartete Störungsrechnung

Die entartete Störungsrechnung kann als nicht-entartete Störungsrechnung mit vorgeschalteter Diagonalisierung des entarteten Unterraums verstanden werden. Dabei liefert die Diagonalisierung bereits die Energiekorrektur erster Ordnung für diese Zustände. Hier ein kleines Kochrezept:

Betrachtet werde der Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ mit der Störung $\hat{H}'$. Das ungestörte Problem sei gelöst mit den Eigenfunktionen $\{\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \dots, \varphi_q^{(0)}, \varphi_{q+1}^{(0)}, \varphi_{q+2}^{(0)}, \dots\}$, die q -fach entartet sind, $E_1^{(0)} = \dots = E_q^{(0)}$. Um Störungsrechnung betreiben zu können, wird zunächst der entartete Unterraum bezüglich der Störung $\hat{H}'$ diagonalisiert. Das heißt, man wechselt in eine neue Basis²

$$\tilde{\varphi}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^q c_{ij} \varphi_j^{(0)} \quad (i, m, l = \{1, 2, \dots, q\}),$$

in der die Untermatrix $\tilde{H}'_{mn} = \langle \tilde{\varphi}_m^{(0)} | \hat{H}' | \tilde{\varphi}_n^{(0)} \rangle = E'_m \delta_{m,n}$ diagonal ist. Die Eigenwerte E'_m erhält man aus der Lösung von

$$\det(H'_{kl} - E'_m \delta_{kl}) = 0 \quad , \text{ wobei } H'_{kl} = \langle \varphi_k^{(0)} | \hat{H}' | \varphi_l^{(0)} \rangle .$$

Die Eigenwerte $E'_m = E_m^{(1)}$ entsprechen dabei bereits den Energiekorrekturen erster Ordnung. Die dazugehörigen Eigenfunktionen, d.h. die Koeffizienten c_{ij} , werden aus

$$\begin{pmatrix} H'_{11} - E'_m & H'_{12} & \cdot & H'_{1q} \\ H'_{21} & H'_{22} - E'_m & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ H'_{2q} & & & H'_{qq} - E'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \cdot \\ c_{mq} \end{pmatrix} = 0$$

berechnet.

Wurde nun die Entartung komplett aufgehoben, so kann die neue Basis

$\{\tilde{\varphi}_1^{(0)}, \tilde{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \tilde{\varphi}_q^{(0)}, \varphi_{q+1}^{(0)}, \varphi_{q+2}^{(0)}, \dots\}$ verwendet werden um damit mittels nicht-entarteter Störungsrechnung Korrekturen höherer Ordnung zu berechnen.

¹Das war fälschlich auf Blatt 11 mit 30.07. angegeben. Die Klausur ist Mo., der 31.07.!

²Dies ist problemlos möglich, da jede Linearkombination der entarteten Zustände ebenfalls eine Lösung der Schrödinger-Gleichung mit der derselben Energie darstellt.

1. Gestörter zweidimensionaler harmonischer Oszillator (7 Punkte, schriftlich)

In Aufgabe 1 auf Blatt 5 haben Sie sich bereits mit einem 2d-harmonischen Oszillator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = \hbar\omega (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1)$$

auseinandergesetzt. Die Energien $E_n^{(0)} = \hbar\omega (n + 1)$, deren Entartungsgrad $g = (n + 1)$, sowie die Eigenfunktionen $|n_x, n_y\rangle$ seien bekannt ($n = n_x + n_y$, $n_x, n_y = \{0, 1, 2, \dots\}$). Insbesondere haben Sie gefunden, dass das Auftreten dieser Entartung der Rotationssymmetrie geschuldet ist. In dieser Aufgabe soll eine zusätzliche Störung der Form

$$\hat{H}' = K \hat{x} \hat{y} = K \underbrace{\frac{\hbar}{2m\omega}}_{\kappa} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) (\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)$$

betrachtet werden.

- Zeigen Sie, dass die Rotationssymmetrie gebrochen ist, d.h. $[\hat{H}', \hat{L}_z] \neq 0$. Die Entartung kann also durch die Störung aufgehoben werden.
- Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle n_x, n_y | \hat{H}' | n'_x, n'_y \rangle$.
- Betrachten Sie den ersten angeregten Zustand $E_1^{(0)}$. Diagonalisieren Sie den entarteten Unterraum bezüglich $\hat{H}'$ und finden Sie die Energiekorrekturen in erster Ordnung $E_{1a}^{(1)}, E_{1b}^{(1)}$ mit den zugehörigen Wellenfunktionen $|\tilde{\varphi}_{1a}\rangle, |\tilde{\varphi}_{1b}\rangle$.
- Wiederholen Sie die Rechnung aus c) für den zweiten angeregten Zustand $E_2^{(0)}$, d.h. finden Sie $E_{2x}^{(1)}$ und $|\tilde{\varphi}_{2x}\rangle$ ($x = \{a, b, c\}$).

In vielen Fällen ist man mit den Energiekorrekturen erster Ordnung vollkommen zufrieden. Hier sollen jedoch auch zweite Ordnungskorrekturen betrachtet werden. Nehmen Sie dazu an, es gäbe nur die Zustände mit $n \leq 2$.

- Berechnen Sie für den Grundzustand die Energiekorrektur $E_0^{(2)}$ zweiter Ordnung, sowie die erste Ordnungskorrektur der Wellenfunktion.
- Bestimmen Sie ebenfalls die Energiekorrekturen zweiter Ordnung $E_{2x}^{(2)}$ des zweiten angeregten Zustandes.

2. Zeeman-Aufspaltung (3 Punkte, mündlich)

Der Zeeman-Effekt ist das magnetische Pendant zum Stark-Effekt. Hier soll ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Elektron im Wasserstoffatom³ betrachtet werden, welches einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ ausgesetzt ist. Der Zeeman-Term lautet

$$\hat{H}' = \frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}, \quad (1)$$

wobei $\vec{L}$ den Bahndrehimpulsoperator und $\vec{S}$ den Spinoperator des Elektrons darstellen.

- Welche Symmetrien des Hamilton-Operators $\hat{H}_0$ des Wasserstoffproblems werden durch den Zeeman-Term $\hat{H}'$ gebrochen?
Tipp: Gesucht sind die Observablen, die mit $\hat{H}_0$ kommutieren, nicht aber mit $\hat{H}'$.
- Berechnen Sie nun die Energieniveaus für alle Zustände $|n, l, m_l, m_s\rangle$.
- Geben Sie die Energien für die $n = 1$ und $n = 2$ Zustände explizit an und stellen Sie deren Zeeman-Aufspaltung graphisch dar.

³mit den bekannten Eigenzuständen $|n, l, m_l, m_s\rangle$ (Hier wird keine Spin-Bahn-Kopplung betrachtet.)