

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 3

MATTHIAS HECKER, MARKUS KLUG

30 Minuten Bearbeitungszeit, 17.05.2017**1. Wellenfunktion eines harmonischen Oszillators (10 Punkte, Quiz)**

Gegeben sei eine Wellenfunktion ψ in einer räumlichen Dimension durch

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{x^2}{2d^2} - i\frac{\omega}{2}t} \quad (1)$$

wobei $d, \omega \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A .
- (b) Zeigen Sie, dass $\psi(x, t)$ die Schrödinger Gleichung für ein quadratisches Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ löst. Bestimmen Sie die Energie E des Zustands ψ und die Längenskala d jeweils in Abhängigkeit der Frequenz ω .

Hinweis: Die zeitabhängige Schrödinger Gleichung ist gegeben durch

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (2)$$

mit $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$.

- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert des kinetischen $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und potentiellen Terms $\hat{V}(x)$ des Hamiltonoperators durch explizite Berechnung.
- (d) Zeigen Sie unter Verwendung des Ehrenfest-Theorems

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle, \quad (3)$$

dass die Zeitableitungen der Erwartungswerte des kinetischen und potentiellen Terms wie zu erwarten verschwinden. Werten Sie hierfür jeweils den Kommutator explizit aus.

Hinweis: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Nützliche Integrale für $d \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{d^2}} = \sqrt{\pi}d$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{x^2}{d^2}} = \frac{\sqrt{\pi}d^3}{2}$$