Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 6 (Quiz)
30 Minuten Bearbeitungszeit, 07.06.2017

---

1. **Warm-Up Fragen (5 Punkte)**

   Beantworten Sie die folgenden Fragen bitte kurz:

   (a) Geben Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung in einer Dimension für ein Potential $V(x)$ an. Wie erhält man daraus die stationäre Schrödingergleichung ?

   (b) Was sind die quantenmechanischen Eigenenergien E_n eines Teilchens mit Masse m in einer Dimension im Potential $V(\hat{x}) = \frac{k}{2}\,\hat{x}^2$?

   (c) Der Operator $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ sei hermitesch. Was ergibt sich daraus für den Eigenwert von $\hat{A}$?

   (d) Was bedeutet es physikalisch für einen Messprozess, wenn zwei hermitesche Operatoren nicht vertauschen, $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$?

   (e) Was gilt für die Eigenfunktionen zweier vertauschender Operatoren (ohne Entartung) ?

2. **Harmonischer Oszillator (5 Punkte)**

   In dieser Aufgabe betrachten wir den eindimensionalen harmonischen Oszillator, gegeben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,\hat{x}^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\,, \tag{1}$$

   wobei

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\,\hat{p}\right] \qquad \text{und} \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\,\hat{p}\right] \tag{2}$$

   die Ab- und Aufsteigeoperatoren sind. Die Eigenwertgleichung

$$\hat{H} \mid n\,\rangle = E_n \mid n\,\rangle \qquad , n \geq 0 \tag{3}$$

   ist gelöst, und wir kennen die Wirkung der Leiteroperatoren auf die Eigenfunktionen in Dirac Notation, $\mid n\,\rangle$, nämlich

$$\hat{a} \mid n\,\rangle = \sqrt{n} \mid n-1\,\rangle \qquad \text{und} \qquad \hat{a}^\dagger \mid n\,\rangle = \sqrt{n+1} \mid n+1\,\rangle\ . \tag{4}$$

   (a) Zeigen Sie, dass gilt $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

   (b) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ und $\langle n|\hat{H}|m\rangle$.

   Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei ein Teilchen im Zustand

$$\mid \psi(0)\,\rangle = A\left(\mid 0\,\rangle - \mid 1\,\rangle + \frac{1}{2} \mid 2\,\rangle\right). \tag{5}$$

   (c) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A. Nehmen Sie an $A \in \mathbb{R}$.

   (d) Bestimmen Sie nun[1] $\mid \psi(t)\,\rangle$ zu beliebigen Zeiten $t > 0$.

   (e) Was ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung im Zustand $\mid \tilde{\psi}(t)\,\rangle$ die Energie E_1 zu messen ?

[1] Dies können Sie auch tun, wenn Sie die Normierungskonstante nicht bestimmt haben.