Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 17

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Matthias Hecker, Markus Klug

Blatt 6 (Quiz) (Lösung)
30 Minuten Bearbeitungszeit, 07.06.2017

---

1. Warm-Up Fragen (5 Punkte, jeweils einer)

(a) Die zeitabhängige SchrödingerGleichung in einer Dimension $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\partial_t\,\psi(x,t)$. Die stationäre SchrGl $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\phi(x) = E\,\phi(x)$ erhält man daraus mittels eines Seperationsansatzes $\psi(x,t) = \phi(x)\,\chi(t)$. Die zeitliche Entwicklung eines solchen stationären Zustandes ergibt sich zu $\chi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

(b) Die Energie des harmonischen Oszillators ist $E_n = \hbar\,\omega(n+\frac{1}{2})$, wobei $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. (Kann man einfach mit Formel (1) des Aufgabenblattes vergleichen.)

(c) Der Eigenwert eines hermiteschen Operators ist rein reell.

(d) Vertauschen zwei hermitesche Operatoren nicht, dann heißt das physikalisch, dass wir beide Observable nicht gleichzeitig scharf messen können.

(e) Vertauschen zwei Operatoren, dann gibt es einen Satz gemeinsamer Eigenfunktionen.

2. Harmonischer Oszillator (5 Punkte, jeweils einer)

(a)

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar}\,\frac{i}{m\omega}\Big(-\underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{i\hbar} + [\hat{p},\hat{x}]\Big) = 1$$

(b) Den Operator $\hat{x}$ erhält man leicht durch addieren der angegebenen Leiteroperatoren zu $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$, und damit das Matrixelement

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{x}|m\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right)\\ \langle n|\hat{H}|m\rangle &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\delta_{n,m}\ .\end{aligned}$$

Der HamiltonOperator is natürlich diagonal in seiner Eigenbasis. Wer das nicht wusste, hat es zumindest nach der kurzen Rechnung gesehen. ;)

(c)

$$1 = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = |A|^2\left(1+1+\frac{1}{4}\right) \quad \to A = \frac{2}{3}$$

(d)

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \frac{2}{3}\left(e^{-i\frac{E_o}{\hbar}t}|0\rangle - e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}|1\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}|2\rangle\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|0\rangle - e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|1\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle\right)\end{aligned}$$

(e)

$$P_1 = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = |-\frac{2}{3}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|^2 = \frac{4}{9}$$