Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

PROF. U. NIERSTE
DR. I. NIŠANDŽIĆ

Übungsblatt 3
Abgabe 17.05.2019
Besprechung 22.05.2019

Name: Matrikel-Nr: Tutor(in):

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 5: Kommutatoren (11 Punkte)

Es seien A, B, C, $X(t)$ und $Y(t)$ lineare Operatoren auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum mit Dimension N.

a) Zeigen Sie: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie: $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}[X(t), Y(t)] = \left[\frac{d}{dt}X(t), Y(t)\right] + \left[X(t), \frac{d}{dt}Y(t)\right] \quad .$$

Dabei ist die Ableitung eines Operators definiert über seine Matrixdarstellung bezüglich einer (beliebigen) Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_N\rangle\}$:

$$X(t) = \sum_{i,j=1}^{N} X_{ij}(t)|e_i\rangle\langle e_j| \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}X(t) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{dX_{ij}}{dt}(t)|e_i\rangle\langle e_j| \quad .$$

(2 Punkte)

d) Es sei

$$X(t) = X_0(t) = e^{tA}Be^{-tA} \quad , \quad X_{n+1}(t) = [A, X_n(t)] \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \tag{1}$$

wobei A und B nicht von t abhängen. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\frac{d^n}{dt^n}X(t) = X_n(t) \quad . \tag{2}$$

(2 Punkte)

e) Beweisen Sie mit (2) die Formel

$$e^{tA}Be^{-tA} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}B_n \quad , \tag{3}$$

wobei B_n mit $B_0 = B, B_{n+1} = [A, B_n]$ definiert ist. *Hinweise: Man kann die Reihenentwicklungen der linken und rechten Seite der Gleichung betrachten.* (3 Punkte)

f) Betrachten Sie den Fall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie B_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie auch $e^{\pm tA}$ und verifizieren Sie (3).
(2 Punkte)

Aufgabe 6: Pauli-Matrizen (9 Punkte)

Jede spurlose hermitesche 2×2-Matrix läßt sich als Linearkombination der drei Pauli-Matrizen schreiben:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass mit der unitären Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \tag{5}$$

die Beziehungen

$$U^\dagger \sigma_j U = \sigma_{j+1} \tag{6}$$

mit $j = 1, 2, 3$ und $\sigma_4 \equiv \sigma_1$ gelten. (1 Punkt)

b) Beweisen Sie die Formel

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \textstyle\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

zunächst für $(i, j) \in \{(3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$. Benutzen Sie dann (6), um die übrigen Fälle mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ zu zeigen. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \textstyle\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad , \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1} \quad ,$$

wobei $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i$ ist. Beweisen Sie für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^3$:

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \mathbb{1} + i(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad , \tag{7}$$

wobei $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i$ ist. (3 Punkte)

d) Zeigen Sie für $\phi \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\boldsymbol{n}| = 1$, dass gilt:

$$e^{i\phi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} = \mathbb{1} \cos \tfrac{\phi}{2} + i(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \tfrac{\phi}{2} \quad . \tag{8}$$

Hinweis: Wenden Sie (7) auf $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$ an, um die Exponentialreihe in (8) aufzusummieren. (3 Punkte)