Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I)   SoSe 19

PROF. U. NIERSTE
DR. I. NISANDZIC

Übungsblatt 4
Abgabe 24.05.2019
Besprechung 29.05.2019

Name: _____ Matrikel-Nr: _____ Gruppe: _____

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 7: Ort, Impuls, Translation (14 Punkte)

Der Impulsoperator P und der Ortsoperator X sind in der Ortsdarstellung durch

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad X = x \quad (1)$$

gegeben.

- a) Benutzen Sie (1), um $[X^n, P]$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen. (3 Punkte)
- b) Benutzen Sie Aufgabe 5a (Übungsblatt 3) und die Vertauschungsrelation $[X, P] = i\hbar$, um $[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. (3 Punkte)
- c) Der *Translationsoperator* ist definiert als

$$\mathcal{T}_a = \exp \left[\frac{i}{\hbar} P a \right], \quad a \in \mathbb{R} \quad .$$

Es sei $\psi(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ analytisch. Berechnen Sie $\mathcal{T}_a \psi(x)$. Wenn Sie $\mathcal{T}_a$ als aktive Transformation auffassen, wird dann $\psi(x)$ um $+a$ oder um $-a$ in x -Richtung verschoben? (2 Punkte)

- d) Berechnen Sie

$$[\mathcal{T}_a, X]$$

- i) mit Hilfe der Formel 3 aus Übungsblatt 3
- ii) durch Anwendung des Ergebnisses aus (c) auf $[X, \mathcal{T}_a] \psi(x)$.

(4 Punkte)

- e) Die Eigenfunktionen von P sind $\psi_p(x) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} p x \right]$ mit $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\psi_p(x)$ auch Eigenfunktion von $\mathcal{T}_a$ ist und bestimmen Sie die Eigenwerte. Betrachten Sie $\langle \mathcal{T}_a \chi | \mathcal{T}_a \psi \rangle$ für beliebige $\chi, \psi \in L^2[\mathbb{R}]$ und entscheiden Sie, ob $\mathcal{T}_a$ unitär ist. (2 Punkte)

Aufgabe 8

(6 Punkte)

- a) Sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hermitesch, d.h. $M^\dagger = M$. Beweisen Sie, dass dann e^{iM} unitär, also $[e^{iM}]^\dagger e^{iM} = e^{iM} [e^{iM}]^\dagger = \mathbf{1}$ ist. (2 Punkte)
- b) Beweisen Sie für $M = M^\dagger$ folgende Beziehung:

$$\det e^{iM} = e^{i \operatorname{Tr} M},$$

wobei “ $\operatorname{Tr} M$ ” die Spur der Matrix M bezeichnet.

(4 Punkte)