Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

Prof. U. Nierste
Dr. I. Nišandžić

Übungsblatt 5
Abgabe 31.05.2019
Besprechung 05.06.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 9: Funktionenräume (10 Punkte)

Der *Schwartz-Raum* ist die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Ableitungen (einschließlich der "nullten", also der Funktion selbst) schneller abfallen als jede Potenzfunktion:

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty[\mathbb{R}] : \max_{x\in\mathbb{R}} \left| x^p \frac{d^k f}{dx^k} \right| < \infty \ \forall\, p, k \in \mathbb{N}\} \quad .$$

Man definiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $\mathcal{S}$ durch

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{C} \ , \ (\chi, \psi) \mapsto \langle \chi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \chi^*(x)\psi(x).$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \chi^*(x)\psi(x)$ konvergiert für alle $\chi, \psi \in \mathcal{S}$.

a) Beweisen Sie, dass $\langle \cdot | \cdot \rangle$ eine *hermitesche Bilinearform* ist. Zeigen Sie dazu folgende Eigenschaften:

i) Linearität in der 2 Variablen: $\langle \chi | \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \chi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \chi | \psi_2 \rangle$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\chi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}$.

ii) $\langle \chi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \chi \rangle$ für alle $\psi, \chi \in \mathcal{S}$.

(2 Punkte)

b) Wir definieren die Operatoren P und X durch

$$X\psi(x) = x\psi(x) \quad , \quad P\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi}{dx}$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass X und P hermitesch sind, d.h. dass

$$\langle \chi | X\psi \rangle = \langle X\chi | \psi \rangle \quad , \quad \langle \chi | P\psi \rangle = \langle P\chi | \psi \rangle$$

für alle $\chi, \psi \in \mathcal{S}$. (2 Punkte)

c) Der Fourier-Operator $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist definiert durch

$$(\mathcal{F}\psi)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}\psi(x)$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}$, $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben ist durch

$$(\mathcal{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipx/\hbar}\tilde{\psi}(p)$$

für alle $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$. Dabei dürfen Sie verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} = 2\pi\delta(k)$ ist, wobei $\delta(k)$ die Dirac'sche Deltafunktion ist. (2 Punke)

d) Zeigen Sie, dass $(2\pi\hbar)^{-1/2}\mathcal{F}$ ein unitärer Operator ist. (2 Punkte)

e) Die Fouriertransformationen $\tilde{X}$ und $\tilde{P}$ der Operatoren X und P sind definiert als

$$\tilde{X} = \mathcal{F}X\mathcal{F}^{-1} \quad , \quad \tilde{P} = \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1},$$

wobei X und P durch b) definiert sind. Berechnen Sie $(\tilde{X}\tilde{\psi})(p)$ und $(\tilde{P}\tilde{\psi})(p)$ für beliebige $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}$, $p \in \mathbb{R}$. (2 Punkte)

Aufgabe 10: Gauß'sche Wellenpakete (10 Punkte)

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi_b(x) = [\pi b^2]^{-1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2b^2}\right] \quad , \quad b > 0 \quad .$$

a) Zeichnen Sie $\psi_b(x)$ für $b = 1\,\text{cm}$ und $b = 5\,\text{cm}$. Berechnen Sie $\langle\psi|\psi\rangle$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $\langle\psi_b|X|\psi_b\rangle$ und die Ortsunschärfe ΔX im Zustand ψ_b.

Hinweis: Zur Berechnung von Integralen der Form $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n}e^{-\alpha x^2}$ mit $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ berechnen Sie zunächst $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}$ und differenzieren Sie dann nach α. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Fouriertransformation $\tilde{\psi}_b(p) = (\mathcal{F}\psi_b)(p)$ gemäß der Definition aus Aufgabe 9. (1 Punkt)

d) Berechnen Sie $\langle\psi_b|P|\psi_b\rangle$ für den Impulsoperator P aus Aufgabe 9. Berechnen Sie auch die Impulsunschärfe ΔP und das Unschärfeprodukt $\Delta X \Delta P$ im Zustand ψ_b. (Hinweis: Mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (c) und Aufgabe 6 können Sie dies auf das Problem aus Aufgabenteil (b) reduzieren.) (1 Punkt)

e) Die kinetische Energie eines (nichtrelativistischen) Elektrons mit Masse m wird durch den Operator

$$H_{\text{kin}} = \frac{P^2}{2m}$$

beschrieben. Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie, $\langle E_{\text{kin}}\rangle = \langle\psi_b|H_{\text{kin}}|\psi_b\rangle$. Berechnen Sie die Unschärfe der kinetischen Energie, $\Delta E_{\text{kin}} = [\langle\psi_b|H^2|\psi_b\rangle - \langle E_{\text{kin}}\rangle^2]^{1/2}$, im Zustand ψ_b. Was passiert mit $\langle E_{\text{kin}}\rangle$ und ΔE_{kin}, wenn wir das Elektron immer weiter lokalisieren, also b immer kleiner wählen? (2 Punkte)

f) Die nichtrelativistische Näherung bricht ungefähr dann zusammen, wenn $\langle E_{\text{kin}} \rangle = mc^2$ ist. Geben Sie den Wert b_{krit} an, bei dem dies der Fall ist. Aus der relativistischen Beziehung

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots$$

verschaffen wir uns den Operator der *relativistischen Korrektur*, $H_{\text{kin}}^{\text{rel}} = -P^4/(8m^3c^2)$. Berechnen Sie $\langle E_{\text{kin}}^{\text{rel}} \rangle = \langle \psi_b | H_{\text{kin}}^{\text{rel}} | \psi_b \rangle$ und zeichnen Sie (im selben Koordinatensystem) $\langle E_{\text{kin}} \rangle/(mc^2)$ und $\langle E_{\text{kin}} + E_{\text{kin}}^{\text{rel}} \rangle/(mc^2)$ als Funktion von b/b_{krit}. (2 Punkte)