Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

Prof. U. Nierste
Dr. I. Nišandžić

Übungsblatt 6
Abgabe 07.06.2019
Besprechung 12.06.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe-Nr:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 11: Schiebeoperatoren (10 Punkte)

Im Hilbertraum l^2 der Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ seien die Operatoren L und R definiert durch:

$$\begin{aligned} L: \quad & a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto La = (a_2, a_3, \ldots) \\ R: \quad & a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto Ra = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt in l^2 ist

$$\langle a|b\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k.$$

a) Zeigen Sie dass $R = L^\dagger$ und $L = R^\dagger$ ist, also

$$\langle a|Rb\rangle = \langle La|b\rangle \quad \text{und} \quad \langle a|Lb\rangle = \langle Ra|b\rangle$$

für alle $a, b \in l^2$ gilt. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $R^\dagger R = \mathbb{1}$ ist und $\|Ra\| = \|a\|$ für alle $a \in l^2$ erfüllt ist. Warum ist R trotzdem nicht unitär? (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von R und $L = R^\dagger$. Beachten Sie dabei, dass $a \in l^2$ die Bedingung $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ erfüllen muss. (4 Punkte)

Aufgabe 12: Elektron im Potenzialtopf (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Potenzial, das für $|x| > a$ unendlich groß ist und für $-a \leq x \leq a$ verschwindet. Die Elektron-Wellenfunktion $\psi(x)$ muss dann für $|x| \geq a$ verschwinden; insbesondere ist also $\psi(-a) = \psi(a) = 0$.

a) Bestimmen Sie aus dem Hamiltonoperator $H = \frac{P^2}{2m}$ die Energie-Eigenwerte E_n und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ in der Ortsdarstellung. Dazu müssen Sie die Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

unter Beachtung der Randbedingung $\psi_n(-a) = \psi_n(a) = 0$ lösen.

(2 Punkte)

b) Prüfen Sie explizit nach, ob die Orthonormalitätsbedingung

$$\int_{-a}^{a} dx\, \psi_k^*(x)\psi_l(x) = \delta_{kl}$$

erfüllt ist. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie $\langle X \rangle$ und die Ortsunschärfe ΔX für alle ψ_n. (2 Punkte)

d) Beweisen Sie, dass der Impulsoperator P hermitesch ist, indem Sie zeigen, dass $\langle \chi | P\psi \rangle = \langle P\chi | \psi \rangle$ für alle $|\psi\rangle$ erfüllt ist, die die Randbedingung $\psi(-a) = \psi(a) = 0$ erfüllen. (1 Punkt)

e) Berechnen Sie $\langle P \rangle$ und die Impulsunschärfe ΔP für alle ψ_n. Geben Sie auch die Unschärfeprodukte $(\Delta X)(\Delta P)$ an. (2 Punkte)

f) Zeigen Sie, dass P überhaupt keine Eigenfunktionen hat, die $\psi(-a) = \psi(a) = 0$ erfüllen, obwohl P hermitesch ist! (1 Punkt)