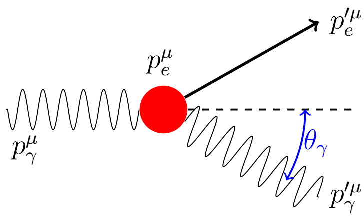
Gesamtpunktzahl: **10 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

**Aufgabe 1: Streuprozess - Compton-Effekt** **5+2 = 7 Punkte**

Ein Photon streut an einem ruhenden Elektron und überträgt dabei Energie und Impuls auf das Elektron. In dieser Aufgabe soll nun die Energie $E'_\gamma$ des Photons nach der Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels $\theta_\gamma$ mittels Energie-Impuls-Vektoren $p^\mu$ bestimmt werden. Diese sind gegeben durch Energie $E_i$ und Impuls $\vec{p}_i$ des Teilchens gemäß $p_i^\mu = (E_i/c, \vec{p}_i)$, $p_{i\mu} = (E_i/c, -\vec{p}_i)$.




Das Quadrat der Energie-Impuls-Vektoren ist invariant unter Lorentz-Transformationen und gegeben durch die invariante Ruhemasse des Teilchens $m_0$ gemäß

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}\,.$$

Diese Aufgabe dient auch als Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie aus der Theorie C.

(a) Nutzen Sie die Energie-Impulserhaltung ausgedrückt durch $p^\mu$ aus, um die Energie des Photons nach dem Stoß zu bestimmen. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Lösen Sie die Gleichung der Energie-Impuls-Vektoren des Elektrons $p_e^\mu$ und des Photons $p_\gamma^\mu$ vor dem Stoß und des Elektrons $p'^\mu_e$ und des Photons $p'^\mu_\gamma$ nach dem Stoß nach $p'^\mu_e$ auf.

(ii) Quadrieren Sie die resultierenden Energie-Impuls-Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung. Verifizieren Sie, dass die Energie des auslaufenden Photons $E'_\gamma$ als Funktion der Elektronmasse $m_e$, des Streuwinkels $\theta_\gamma$ und der Energie des einlaufenden Photons $E_\gamma$ durch

$$E'_\gamma = E_\gamma \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)\right)^{-1}$$

gegeben ist.

*Hinweis:* Schreiben Sie die relevanten Energie-Impuls-Vektoren explizit auf. Nutzen Sie das Skalarprodukt im Minkowski-Raum $p_i \cdot p_j = p_{i\mu} p_j^\mu = E_i E_j / c^2 - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j$ unter Verwendung der Metrik $g^{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$. Es gilt $\vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}'_\gamma = |\vec{p}_\gamma||\vec{p}'_\gamma| \cos\theta_\gamma$. Das Elektron ist anfänglich in Ruhe, also $\vec{p}_e = \vec{0}$. Die Ruhemasse des Photons ist $m_\gamma = 0$, damit können Sie $|\vec{p}_\gamma|$ direkt als Funktion von $E_\gamma$ ausdrücken.

(b) Die Energie eines Photons ist durch seine Wellenlänge $\lambda$ gemäß $E_\gamma = 2\pi\hbar c/\lambda$ mit Planckschen Wirkungsquantum $\hbar$ gegeben. Bestimmen Sie die Differenz der Wellenlängen $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.

**Lösung der Aufgabe 1**

(a) Die Energie-Impuls-Erhaltung ausgedrückt durch die Energie-Impuls-Vektoren ist

$$p_e^\mu + p_\gamma^\mu = p'^\mu_e + p'^\mu_\gamma\,.$$

Wir lösen nach $p_e'^\mu$ auf und erhalten

$$p_e'^\mu = p_e^\mu + p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu \,.$$

Quadrieren dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned} p_e'^2 &= \left(p_e^\mu + p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu\right)^2 = \left(p_e^\mu + p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu\right)\left(p_{e\mu} + p_{\gamma\mu} - p'_{\gamma\mu}\right) \\ &= p_e^2 + p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 + 2p_e \cdot (p_\gamma - p'_\gamma) - 2p_\gamma \cdot p'_\gamma \end{aligned}$$

Wir nutzen die Invarianz des Skalarprodukts im Minkowski-Raum gegenüber Lorentz-Transformationen $p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2$ und beachten, dass $p_\gamma^2 = p_\gamma'^2 = 0$ und $p_e^2 = p_e'^2 = m_e^2 c^2$. Damit folgt

$$m_e^2 c^2 = m_e^2 c^2 + 2p_e \cdot (p_\gamma - p'_\gamma) - 2p_\gamma \cdot p'_\gamma \qquad \Longrightarrow \qquad 2p_\gamma \cdot p'_\gamma = 2p_e \cdot (p_\gamma - p'_\gamma)$$

Wir benötigen nun die explizite Darstellung der drei Momenta in der vorherigen Gleichung. Wir unterscheiden die kontravarianten Vektoren von den kovarianten Vektoren, für die gilt

$$p_i^\mu = \begin{pmatrix} E_i/c \\ \vec{p}_i \end{pmatrix}, \qquad p_{i\mu} = \begin{pmatrix} E_i/c \\ -\vec{p}_i \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung der Metrik $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ ist das Skalarprodukt im Minkowski-Raum gegeben durch

$$p_i \cdot p_j = p_{i\mu} p_j^\mu = p_i^\nu g_{\nu\mu} p_j^\mu = \frac{E_i E_j}{c^2} - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \,.$$

Explizit ergeben sich für die beteiligten Teilchen

$$p_e^\mu = \begin{pmatrix} m_e c \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_\gamma^\mu = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}, \qquad p_\gamma'^\mu = \begin{pmatrix} E'_\gamma/c \\ \vec{p}\,'_\gamma \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass $p_e^2 = m_e^2 c^2 = E_e^2/c^2 - \vec{0}^2$ und somit $E_e = m_e c^2$. Desweiteren gilt wegen der verschwindenden Ruhemasse des Photons, dass $p_\gamma^2 = 0 = E_\gamma^2/c^2 - \vec{p}_\gamma^{\,2}$ und damit $|\vec{p}_\gamma| = E_\gamma/c$. Analog ist $|\vec{p}\,'_\gamma| = E'_\gamma/c$. Mit diesen Erkenntnissen folgt für die zwei Skalarprodukte

$$\begin{aligned} p_\gamma \cdot p'_\gamma &= \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} - \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}\,'_\gamma = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2} - |\vec{p}_\gamma||\vec{p}\,'_\gamma| \cos\theta_\gamma = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{c^2}(1 - \cos\theta_\gamma) \\ p_e \cdot (p_\gamma - p'_\gamma) &= \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\gamma/c - E'_\gamma/c \\ \vec{p}_\gamma - \vec{p}\,'_\gamma \end{pmatrix} = m_e (E_\gamma - E'_\gamma) \end{aligned}$$

Damit folgt aus $2p_\gamma \cdot p'_\gamma = 2p_e \cdot (p_\gamma - p'_\gamma)$ die Beziehung

$$0 = E_\gamma - E'_\gamma - \frac{E_\gamma E'_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)$$

und somit das gewünschte Resultat

$$E'_\gamma = E_\gamma \left[1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)\right]^{-1}.$$

(b) Wir nutzen $E_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}$ wegen $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Somit ist $\lambda = \frac{hc}{E_\gamma}$ und $\lambda' = \frac{hc}{E'_\gamma}$ und die Wellenlängendifferenz

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = hc\left[\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma}\right] &= hc\left[\frac{1+\frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1-\cos\theta_\gamma)}{E_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma}\right]\\ &= \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta_\gamma) = \lambda_c(1-\cos\theta_\gamma)\end{aligned}$$

Es kommt somit insbesondere für große Streuwinkel $\theta_\gamma \to \pi$ und damit für $(1-\cos\theta_\gamma) \to 2$, also für eine Rückstreuung der Photonen, zu einer deutlichen Wellenlängenverschiebung. Für größere Anfangsenergien $E_\gamma$ ist außerdem der Energieübertrag an das Elektron größer und somit $E'_\gamma < E_\gamma$. Für $E_\gamma < m_e c^2$ hingegen verbleibt $E'_\gamma \approx E_\gamma$.

**Aufgabe 2: Polarisationsfilter - Wahrscheinlichkeiten** **1+1+1 = 3 Punkte**

Das elektrische Feld eines in $x$-Richtung linear polarisierten Lichtstrahls sei

$$\vec{E}(\vec{x},t) = E\,\vec{e}_x\,e^{i(kz-\omega t)}$$

mit $\vec{e}_x = (1,0,0)$. Die Intensität des Strahls ist

$$I = \beta|\vec{E}|^2$$

mit einer für die folgende Diskussion irrelevanten Konstanten $\beta$. Nach Durchlaufen eines Polarisationsfilters, der um den Winkel $\theta$ gegen die $x$-Achse verdreht ist, hat der Lichtstrahl die Form

$$\vec{E}'(\vec{x},t) = E'\,\vec{e}_\theta\,e^{i(kz-\omega t)}$$

mit $\vec{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

(a) Drücken Sie $E'$ und $I' = \beta|\vec{E}'|^2$ durch $E$ und $\theta$ aus. Was passiert bei $\theta = \pi/2$?

(b) Es sei nun $\theta = \pi/2$. Schalten Sie nun einen zweiten Polarisationsfilter *vor* den ersten, mit Winkel $\hat{\theta} = \pi/4$. Wie sieht das elektrische Feld des Strahls nach Durchlaufen beider Filter aus?

(c) Wie kann man diese Beobachtungen im Rahmen der Quantenmechanik interpretieren, wenn die Intensität des Lichtstrahls auf einzelne Photonen reduziert wird?
*Hinweis:* Es genügt eine qualitative Diskussion ohne Formeln.

**Lösung der Aufgabe 2**

(a) Eine einfache geometrische Überlegung ergibt für die Amplitude

$$E' = E\cos\theta$$

und damit

$$I' = \beta E'^2 = \beta E^2\cos^2\theta$$

Offenbar ist $E' = I' = 0$ für $\theta = \pi/2$.

(b) Hier folgt offensichtlich:

$$E'' = E\cos\hat{\theta}\cos\hat{\theta} = \frac{1}{2}E$$
$$I'' = I\cos^2\hat{\theta}\cos^2\hat{\theta} = \frac{1}{4}I$$

Tatsächlich führt die doppelte Polarisation also zu einer Intensität hinter dem zweiten Polarisator.

(c) Der Polarisator ist für ein einzelnes Photon ein Messinstrument, welches das Photon entweder passieren lässt oder nicht. Für ein einzelnes Photon kann ein Passierwahrscheinlichkeit angegeben werden, welche sich bei Betrachtung von $n$ Photonen, von denen $n'$ den Polarisator durchqueren eben auch gerade nach $p(\theta) = n'/n = \cos^2\theta$ ergibt. Dies setzt voraus, dass die Photonen im Anfangszustand alle linear polarisiert sind.
Festzuhalten bleibt, dass die zweifache Messung ("Nachfrage nach der Polarisation des Photons mit Antwort ja/nein") analog zum klassischen Fall das Passieren durch beide Polarisatoren rein statistisch erlaubt, weil im Falle zweier Polarisatoren zwei endliche Passierwahrscheinlichkeiten bleiben.