Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2020 - Blatt 2
Moderne Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: 27.04.20
Abgabe: 04.05.20
Besprechung: 06.05.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Hinweise zur Nutzung von Microsoft Teams und Zoom:

Die Übungsgruppen finden in Microsoft Teams statt. Für jede Übungsgruppe wurde ein eigenes Team erstellt. Den Link zu Ihrem Teams finden Sie in den Übungsgruppen. Die ersten Übungsgruppen finden am Mittwoch, 29.04.2020, statt. Stimmen Sie bitte nach gründlichem Studium schon deutlich früher auf freiwilliger Basis der Datenschutzvereinbarung auf
`https://my.scc.kit.edu/shib/azurefreigabe.php`
zu, da mitunter erst Stunden später ein Beitritt zu Microsoft Teams funktioniert. Sie können sich dann auf Microsoft Teams im Browser direkt mit Ihrer Studierenden Email (uxxxx@student.kit.edu) anmelden
`https://products.office.com/de-de/microsoft-teams/group-chat-software`
und werden auf Shibboleth des KIT um- und dann wieder zurück zu Microsoft geleitet. Zu empfehlen ist auch der Client zu Microsoft Teams für Desktop oder das Mobiltelefon
`https://products.office.com/de-de/microsoft-teams/download-app`
da die Verwendung im Browser nicht immer die Anruffunktion unterstützt.
Sobald Sie in Ihrem Team sind finden Sie dort einen Chatverlauf. Zum Zeitpunkt der Übungsgruppe eröffnet Ihr Tutor ein Meeting, welches im Chatverlauf erscheint und welchem Sie dann beitreten können. Lassen Sie zu Beginn die Kamera und das Mikrofon aus, um die Verbindung von Studierenden mit schwacher Bandbreite nicht zu überfordern.
Vermeiden Sie die auf der Webseite beschriebenen Fallen. Sollten Sie es nicht in Ihre Gruppe schaffen, zögern Sie nicht sich mit Gruppennummer und Kürzel zu melden, Sie sind nicht allein.

Ein interaktiver Teil der Saalübung findet ab Dienstag, 28.04.2020, ab 17:30 Uhr in Zoom statt. Die Teilnahme ist freiwillig. Beachten Sie vorher unbedingt
`https://s.kit.edu/zoomhinweise`
Aus Datenschutzgründen wird empfohlen einen Alias zu nutzen und Ihre Kamera und das Mikrofon nicht anzuschalten.
`https://kit-lecture.zoom.us/`
Meeting ID: 991 3861 5612
Passwort: weloveQM
Der direkte Link zum Zoom Meeting ist:
`https://kit-lecture.zoom.us/j/99138615612?pwd=WlNveWxqU0MyK3UrWkIvMlBiRDc0Zz09`

Aufgabe 1: Fourier-Transformation und Wellenpaket — 2+2+3 = 7 Punkte

Der Welle-Teilchen-Dualismus erlaubt die Beschreibung von Teilchen als Wellenpakete, deren Auftreten in Orts- und Impulsraum durch eine Fourier-Transformation verknüpft sind. Wir betrachten im Impulsraum eine generische Wellenzahlverteilung der Form

$$g(k) = \begin{cases} N & \text{für} \quad -K \leq k \leq K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie die Form des Wellenpakets im Ortsraum, indem Sie die Fourier-Transformation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx}$$

ausführen.

(b) Berechnen Sie den Normierungsfaktor N so, dass das Wellenpaket im Ortsraum normiert ist, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = 1$$

gilt. Berechnen Sie sodann auch $\int_{-\infty}^{\infty} dk |g(k)|^2$.
Hinweis: Schlagen Sie die notwendigen Integrale gerne nach.

(c) Skizzieren Sie die Verteilungen $f(x)$ und $g(k)$, und ermitteln Sie anhand der Skizze eine sinnvolle Definition für die Breiten Δx und Δk der Verteilungen $f(x)$ und $g(k)$. Zeigen Sie, dass unabhängig von K gilt

$$(\Delta x)(\Delta k) \geq \mathcal{O}(1)\,.$$

Dies entspricht der Heisenberg'schen Unschärferelation. Betrachten und interpretieren Sie zuletzt die Grenzfälle $K \to \infty$ bei endlichem N und $K \to 0$ bei endlichem $N \cdot K$.

Aufgabe 2: Dispersion eines Wellenpakets **5+4+2+2 = 13 Punkte**

Wir möchten uns in dieser Aufgabe mit Wellenpaketen noch vertrauter machen und betrachten die Ausbreitung eines Gauß'schen Wellenpaketes $\psi(x,t)$ in Raum und Zeit. Per Konstruktion erfüllt $\psi(x,t)$ die eindimensionale Schrödingergleichung des freien Teilchens. Für ein Ebensolches berechnen wir in dieser Aufgabe die zunehmende Ortsunschärfe.
Hinweis: Wenn Sie bei der Berechnung mancher Integrale scheitern können Sie trotzdem weitermachen. Sie können Teilaufgaben auch einzeln bearbeiten.

(a) Als Beispiel für die Ausbreitung einer nicht-relativistischen Materiewelle in einer Dimension betrachten wir das Gauß'sche Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \qquad \text{mit} \qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

und

$$g(k) = C\ \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2\right)\,.$$

(i) Bestimmen Sie $\psi(x,t)$. Das Ergebnis lässt sich auf die folgende Form bringen

$$\psi(x,t) = \frac{Ca}{\sqrt{1 + i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp\left(-\frac{a^2(x - v_g t)^2}{2(1 + i\frac{a^2\hbar t}{m})}\right) \exp\left(i(k_0 x - \omega_0 t)\right)$$

mit $v_g = \hbar k_0/m$ und $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$. *Hinweis:* Um auf dieses Resultat zu kommen, empfiehlt sich beispielsweise folgendes Vorgehen: Substituieren Sie $u = k - k_0$. Nehmen Sie von u abhängige Anteile aus dem Integral. Führen Sie zwischenzeitlich die Abkürzung $s = \left(1 + ia^2\hbar t/m\right)/(2a^2)$ ein, so dass Sie nach quadratischer Ergänzung einen Ausdruck $\exp\left\{-s\left[u - i(x - v_g t)/(2s)\right]^2\right\}$ im Integral stehen haben. Nutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-A(y-y_0)^2) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$.

(ii) Legen Sie die Konstante C so fest, dass $\psi(x,t)$ und $g(k)$ normiert sind, also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\psi(x,t)|^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dk\ |g(k)|^2 = 1\,.$$

(b) Bilden Sie für die normierten Wellenfunktionen $\psi(x,t)$ aus Teilaufgabe (b) ($C^{-1} = \sqrt{a\sqrt{\pi}}$) den Erwartungswert des Ortes

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x,t)^* x\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x|\psi(x,t)|^2$$

sowie die Varianz $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ als Maß für die Breite des Gauß'schen Wellenpakets im Ortsraum. *Hinweis:* Hier ist auch $\int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 \exp(-Ay^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A^3}}$ hilfreich.

(c) Kommentieren Sie das raum-zeitliche Verhalten von $|\psi(x,t)|^2$.

(d) Innerhalb welcher Zeitspannen T verdoppelt sich die bei $t = 0$ vorhandene Breite $(\Delta x)_{t=0}$ in den nachfolgenden Fällen? Berechnen Sie T für

i) ein Elektron mit Masse $m_e = 0.9\cdot 10^{-27}$ g und $(\Delta x)_{t=0} \approx 10^{-8}$ cm, welches anfänglich innerhalb einer dem Atomdurchmesser entsprechenden Strecke lokalisiert ist.

ii) ein Elektron mit Masse $m_e = 0.9 \cdot 10^{-27}$ g und $(\Delta x)_{t=0} \approx 10^{-1}$ cm, einer Breite, die typisch für Blendenöffnungen bei Versuchen im Labor ist.

iii) die Biene Maja mit Masse $m = 0.1$ g und $(\Delta x)_{t=0} \approx 1$ cm.[1]

Aufgabe 3: Mathematischer Hintergrund **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen, sondern nach Absprache mit Ihrem Tutor können Sie sich für eine Präsentation im Tutorium anmelden. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig und getrennt zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

(a) Der Zusammenhang zwischen Ort und Impuls, respektive Orts- und Impulsraum, ist eine Fourier-Transformation. Erklären Sie Ihren Kommilitonen die Grundidee einer kontinuierlichen Fourier-Transformation, und erläutern Sie den Satz von Plancherel sowie das Faltungstheorem, am besten mit einem Beispiel.

(b) Die Quantenmechanik arbeitet mit statistischen Aussagen. Geben Sie Ihren Kommilitonen einen kurzen Einblick in die Welt der nachfolgenden statistischen Größen bei einer diskreten und einer kontinuierlichen Zufallsvariable X: Erwartungswert $\langle X\rangle$, Varianz $\mathrm{Var}(X) = \langle (X - \langle X\rangle)^2\rangle$, Standardabweichung. Nutzen Sie Beispiele. Skizzieren Sie einen Beweis des Verschiebungssatzes, der besagt, dass die Varianz auch in der Form $\mathrm{Var}(X) = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$ geschrieben werden kann.

[1] Muss sich Maja Sorgen machen, dass sie nach der Quarantäne nicht mehr durch den Nestausgang passt?