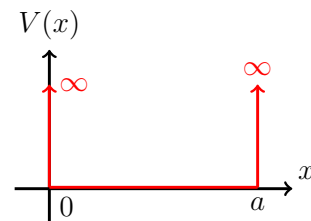


**Aufgabe 1: Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden**

**2+3 = 5 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Wellenfunktion eines Teilchens mit Masse  $m$  in einem Potentialtopf der Breite  $a$  mit unendlich hohen Wänden in einer Dimension, gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$



- Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf und begründen Sie, warum alle Lösungen für  $x < 0$  und  $x > a$  verschwinden müssen, indem Sie  $V(x)$  als Grenzfall eines endlichen Potentialtopfs betrachten.
- Bestimmen Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung im Topf durch einen Exponentialansatz. Fordern Sie Stetigkeit der Wellenfunktion am Rande des Topfs. Zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte quantisiert sind und bestimmen Sie die zugehörigen Energieeigenzustände, also die jeweilige normierte Wellenfunktion.

**Aufgabe 2: Gebundene Zustände im Potentialtopf**

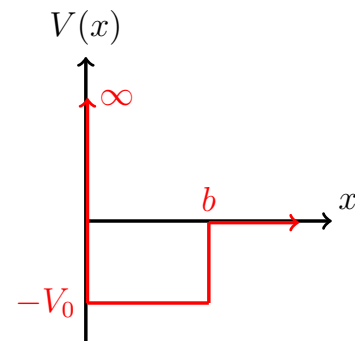
**2+2+3 = 7 Punkte**

Betrachten Sie ein im eindimensionalen Potential

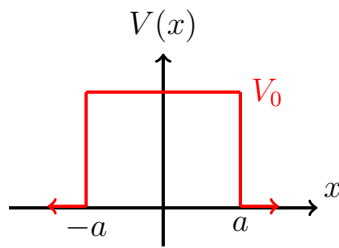
$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 < 0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } x > b \end{cases}$$

gebundenes Teilchen der Masse  $m$  und Energie  $-V_0 < E < 0$ .  
 Benutzen Sie die folgenden Abkürzungen

$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}, \quad \rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \quad \text{und} \quad K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2}.$$



- Geben Sie die allgemeine Form der Lösungen der stationären Schrödingergleichung für die drei Bereiche  $x < 0$ ,  $0 \leq x \leq b$ ,  $x > b$  an.
- Formulieren Sie die Anschlussbedingungen bei  $x = 0$  und  $x = b$ . Zeigen Sie insbesondere, dass die Anschlussbedingungen bei  $x = b$  auf die Gleichung  $\tan(Kb) = -K/\rho$  führen. *Hinweis:* Während Sie bei  $x = b$  Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Wellenfunktion verlangen können, so ist bei  $x = 0$  nur Stetigkeit der Wellenfunktion zu fordern.
- Untersuchen Sie qualitativ die Anzahl der gebundenen Zustände für festes  $b$  in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt, genauer für  $V_0 < \pi^2 \hbar^2 / (8mb^2)$ . *Hinweis:* Schreiben Sie die Gleichung  $\tan(Kb) = -K/\rho$  um in  $|\sin(Kb)| = K/k_0$ . Lösen Sie die Problematik nun graphisch, indem Sie als Funktion von  $K$  die Abhängigkeiten  $|\sin(Kb)|$  und  $K/k_0$  zeichnen, sowie die relevante Region  $\tan(Kb) < 0$  markieren.

**Aufgabe 3: Streuung am Potentialwall - Tunneleffekt****2+3+3 = 8 Punkte**

Wir möchten in dieser Aufgabe die in der Vorlesung skizzierte Rechnung zum Tunneleffekt genau nachvollziehen. Betrachten Sie die Streuung eines freien, von links einlaufenden Teilchens  $\propto e^{ik(x-vt)}$  mit  $v = \omega/k > 0$  an einem Potentialwall ( $V_0 > 0$ )

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq a \\ V_0 & \text{für } |x| < a \end{cases}$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für den Fall  $0 < E < V_0$  durch nachfolgende Schritte.

- (a) Begründen Sie, dass die Wellenfunktion folgende Form hat

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für } x \leq -a \\ Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x} & \text{für } -a < x < a \\ te^{ikx} & \text{für } x \geq a \end{cases} \quad \text{mit } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

*Zusatz:* Wir betrachten direkt eine einlaufende Welle ohne Normierungskoeffizienten, d.h. der Koeffizient der Vorlesung ist  $A_I = 1$  und daher  $r = B_I$  und  $t = A_{III}$ . Die korrekte Behandlung eines einlaufenden, normierbaren Wellenpakets liefert komplizierte Ausdrücke, gibt aber keine tiefergehenden Einblicke in die Thematik.

- (b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von  $\varphi$ ) und zeigen Sie, dass diese auf folgendes Gleichungssystem führen:

$$\begin{pmatrix} (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} & (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} \\ (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} & (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-ika} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem und ermitteln Sie  $A$  und  $B$ .

- (c) Berechnen Sie mit Hilfe von  $A$  und  $B$  aus den Anschlussbedingungen die Koeffizienten  $r$  und  $t$  und sodann die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, hier  $R = |r|^2$  und  $T = |t|^2$ . Zeigen Sie, dass Wahrscheinlichkeitserhaltung gilt, also  $|R|^2 + |T|^2 = 1$  gilt. Welche Eigenschaft steht im Widerspruch zum klassischen Verhalten?

**Aufgabe 4: Mathematischer Hintergrund und Praxisbeispiele****Präsenzaufgabe**

*Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.*

- (a) Bereiten Sie eine Präsentation vor, die praktische Anwendungen des quantenmechanischen Tunneleffekts vorstellt.
- (b) Wiederholen Sie den Begriff des Vektorraums. Dazu gehört der zugrunde liegende Körper als auch die relevanten Verknüpfungen. Diskutieren Sie neben den Standardbeispielen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  auch einen Funktionenraum als Beispiel für einen Vektorraum. Bringen Sie Licht ins Dunkel des Begriffs Skalarprodukt.