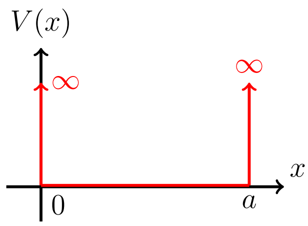
Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

### Aufgabe 1: Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden — **2+3 = 5 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Wellenfunktion eines Teilchens mit Masse $m$ in einem Potentialtopf der Breite $a$ mit unendlich hohen Wänden in einer Dimension, gegeben durch




$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf und begründen Sie, warum alle Lösungen für $x < 0$ und $x > a$ verschwinden müssen, indem Sie $V(x)$ als Grenzfall eines endlichen Potentialtopfs betrachten.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung im Topf durch einen Exponentialansatz. Fordern Sie Stetigkeit der Wellenfunktion am Rande des Topfs. Zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte quantisiert sind und bestimmen Sie die zugehörigen Energieeigenzustände, also die jeweilige normierte Wellenfunktion.

### Lösung der Aufgabe 1

(a) Die stationäre Schrödingergleichung in einer Dimension ist von der Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V\varphi(x) = E\varphi(x) \quad \leftrightarrow \varphi''(x) + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\varphi(x) = 0 .$$

Die Lösungen in den Gebieten $x < 0$ und $x > a$ müssen wegen der Quadratintegrierbarkeit von der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{\rho x} & \text{für} \quad x < 0 \\ Be^{-\rho x} & \text{für} \quad x > a \end{cases}$$

mit $\rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ sein. Für $V_0 \to \infty$ geht $\rho \to \infty$ und daher $\varphi(x) \to 0$. Die Lösung außerhalb des Potentialtopfs muss also verschwinden.

(b) Die Lösungen der Schrödingergleichung im Potentialtopf sind von der Form

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} + B^{-ikx}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Wir bestimmen die Konstanten aus den Anschlussbedingungen

$$\varphi(0) = Ae^0 + Be^{-0} = A + B \stackrel{!}{=} 0 \quad \to \quad B = -A$$
$$\varphi(a) = A(e^{ika} - e^{-ika}) = A2i\sin(ka) \stackrel{!}{=} 0 .$$

Aus letzterer Forderung folgt $ka = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $k_n = \pi n/a$. Die triviale Lösung $\varphi(x) = 0$ liefert kein physikalische Wellenfunktion. Es folgen daher quantisierte Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{\hbar}{2m} k_n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \,.$$

Die verbleibende Konstante $A$ lässt sich durch Normierung der Wellenfunktion bestimmen. Es folgt

$$\int_0^a dx |\varphi(x)|^2 = \int_0^a dx A^2 (2i)(-2i) \sin^2(kx) = 4A^2 \int_0^a dx \sin^2(kx) = 4A^2 \frac{a}{2} \stackrel{!}{=} 1$$

Somit ist $A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ und die Energieeigenzustände zu den Energieeigenwerten sind

$$\varphi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \qquad \text{mit} \qquad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \,.$$

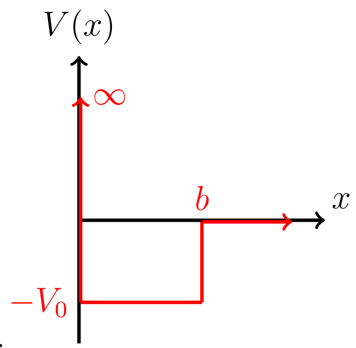
Dies sind stehende Wellen mit diskreten Energieniveaus und einer Minimalenergie von $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} > 0$ in Vereinbarkeit mit der Heisenberg'schen Unschärferelation. Die auftretende komplexe Phase kann man unter den Tisch fallen lassen, indem man einheitlich bei allen Lösungen das $i$ entfernt durch Multiplikation mit einer globalen Phase wie z.B. $e^{i3/2\pi}$.

## Aufgabe 2: Gebundene Zustände im Potentialtopf

**2+2+3 = 7 Punkte**

Betrachten Sie ein im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x < 0 \\ -V_0 < 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le b \\ 0 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$$




gebundenes Teilchen der Masse $m$ und Energie $-V_0 < E < 0$. Benutzen Sie die folgenden Abkürzungen

$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}, \qquad \rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \qquad \text{und} \quad K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2} \quad .$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form der Lösungen der stationären Schrödingergleichung für die drei Bereiche $x < 0$, $0 \le x \le b$, $x > b$ an.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = b$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Anschlussbedingungen bei $x = b$ auf die Gleichung $\tan(Kb) = -K/\rho$ führen.
*Hinweis:* Während Sie bei $x = b$ Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Wellenfunktion verlangen können, so ist bei $x = 0$ nur Stetigkeit der Wellenfunktion zu fordern.

(c) Untersuchen Sie qualitativ die Anzahl der gebundenen Zustände für festes $b$ in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt, genauer für $V_0 < \pi^2\hbar^2/(8mb^2)$.
*Hinweis:* Schreiben Sie die Gleichung $\tan(Kb) = -K/\rho$ um in $|\sin(Kb)| = K/k_0$. Lösen Sie die Problematik nun graphisch, indem Sie als Funktion von $K$ die Abhängigkeiten $|\sin(Kb)|$ und $K/k_0$ zeichnen, sowie die relevante Region $\tan(Kb) < 0$ markieren.

**Lösung der Aufgabe 2**

(a) Die stationäre Schrödingergleichung ist für ein Potential $V$ wieder von der Form

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\varphi(x) = 0\,.$$

Da wir ein gebundenes Teilchen betrachten wollen, ist $-V_0 < E < 0$. Damit folgt für die einzelnen Bereiche:

1) $x < 0$: Wie in der Aufgabe zuvor bleibt nur die Lösung $\varphi_1(x) = 0$.

2) $0 \leq x \leq b$: Die Schrödingergleichung ist von der Form

$$\varphi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)\varphi_2(x) = 0,$$

Wir beginnen nochmal elementar mit dem Ansatz $\varphi(x) = Ae^{Bx}$ und erhalten:

$$AB^2e^{Bx} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)Ae^{Bx} = 0$$

Daraus folgt $B^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0) = -K^2$, wobei $E+V_0 > 0$, und somit als allgemeine Lösung

$$\varphi_2(x) = A_2e^{iKx} + A_2'e^{-iKx}\,.$$

mit beliebigen, im allgemeinen komplexen Konstanten $A_2$ und $A_2'$.

3) $x > b$: Hier erhält man als Schrödingergleichung

$$\varphi_3''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_3(x) = 0$$

mit negativem $E$. Daher ergibt ein äquivalenter Exponentialansatz als Lösung

$$\varphi_3(x) = A_3e^{\rho x} + A_3'e^{-\rho x}\,.$$

Da die Lösung beschränkt und normierbar sein soll, lässt sich $A_3 = 0$ setzen.

(b) Die Anschlussbedingungen liefern offensichtlich

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad \Rightarrow \quad A_2 + A_2' = 0, \quad A_2 = -A_2'\,.$$

Differenzierbarkeit kann bei $x = 0$ nicht gefordert werden, jedoch bei $x = b$

$$\begin{aligned} \varphi_2(b) = \varphi_3(b) \quad &\Rightarrow \quad A_2e^{iKb} - A_2e^{-iKb} = 2iA_2\sin(Kb) = A_3'e^{-\rho b} \\ \left.\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}\right|_{x=b} = \left.\frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x}\right|_{x=b} \quad &\Rightarrow \quad 2iA_2K\cos(Kb) = -\rho A_3'e^{-\rho b}\,. \end{aligned}$$

Division der beiden Gleichungen liefert die geforderte Bedingung $\tan(Kb) = -K/\rho$.

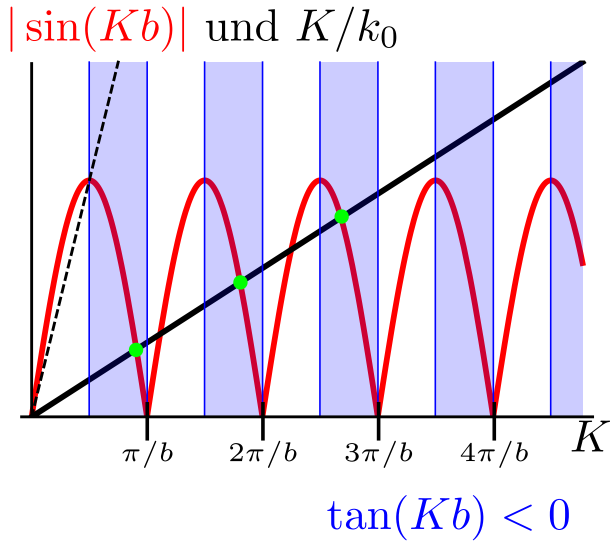
(c) Die Gleichung $\tan(Kb) = -K/\rho$ kann leicht umgeschrieben werden in

$$\frac{1}{\sin^2(Kb)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(Kb)} = 1 + \frac{\rho^2}{K^2} = \frac{K^2+\rho^2}{K^2} = \frac{k_0^2}{K^2}\,.$$

Also muss erfüllt sein

$$|\sin(Kb)| = \frac{K}{k_0} \qquad \text{und} \qquad \tan(Kb) < 0\,.$$

Graphisch können die Lösungen dieser Gleichungen als Funktion von $K$ leicht dargestellt werden. In der nachfolgenden Graphik ist $|\sin(Kb)|$ in rot dargestellt, während $K/k_0$ eine Gerade in schwarz darstellt. In blau markiert ist der Bereich mit $\tan(Kb) < 0$. Alle Bedingungen sind für die grün markierten Punkte erfüllt, die somit die möglichen quantisierten Bindungszustände darstellen. Diese haben aufgrund des fixierten Wertes von $K$ und damit $\rho$ quantisierte Energieeigenwerte $E$. Zu diesen Werten lassen sich stehende Wellen als Energieeigenfunktionen konstruieren, was wir uns hier allerdings ersparen.




Wir bezeichen den Winkel zwischen der $x$-Achse und der Gerade $K/k_0$ mit $\alpha$. Dann ist $\tan\alpha = \frac{1}{k_0}$. Die Anzahl der gebundenen Zustände nimmt mit wachsendem $k_0$ zu. Um $n \in \mathbb{N}_0$ gebundene Zustände zu erhalten, muss für $k_0$ gelten

$$\frac{(2n+1)\pi}{2b} \geq k_0 > \frac{(2n-1)\pi}{2b}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{bk_0}{\pi} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{1}{2} + \frac{bk_0}{\pi}\,.$$

Insbesondere muss folgende Ungleichung erfüllt sein, so dass kein gebundener Zustand exisitiert

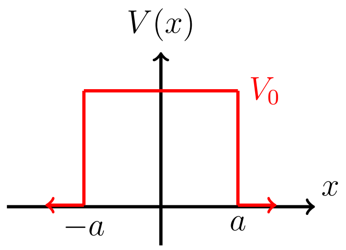
$$\frac{1}{2} + \frac{bk_0}{\pi} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad k_0 < \frac{\pi}{2b}\,.$$

Die Gerade mit $k_0 = \frac{\pi}{2b}$ ist in der obigen Graphik gestrichelt dargstellt. Einsetzen von $k_0$ liefert

$$V_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{8mb^2}\,.$$

Für entsprechende Werte von $V_0$ gibt es also keine gebundenen Zustände mehr. Wir ersparen uns eine exakte Berechnung der Lösungen der angegebenen Gleichung sowie der zugehörigen Wellenfunktionen.

**Aufgabe 3: Streuung am Potentialwall - Tunneleffekt** **2+3+3 = 8 Punkte**




Wir möchten in dieser Aufgabe die in der Vorlesung skizzierte Rechnung zum Tunneleffekt genau nachvollziehen. Betrachten Sie die Streuung eines freien, von links einlaufenden Teilchens $\propto e^{ik(x-vt)}$ mit $v = \omega/k > 0$ an einem Potentialwall ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \geq a \\ V_0 & \text{für} \quad |x| < a \end{cases}$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für den Fall $0 < E < V_0$ durch nachfolgende Schritte.

(a) Begründen Sie, dass die Wellenfunktion folgende Form hat

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für} \quad x \leq -a \\ Ae^{\rho x} + Be^{-\rho x} & \text{für} \quad -a < x < a \\ te^{ikx} & \text{für} \quad x \geq a \end{cases} \qquad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

*Zusatz:* Wir betrachten direkt eine einlaufende Welle ohne Normierungskoeffizienten, d.h. der Koeffizient der Vorlesung ist $A_I = 1$ und daher $r = B_I$ und $t = A_{III}$. Die korrekte Behandlung eines einlaufenden, normierbaren Wellenpakets liefert komplizierte Ausdrücke, gibt aber keine tiefergehenden Einblicke in die Thematik.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\varphi$) und zeigen Sie, dass diese auf folgendes Gleichungssystem führen:

$$\begin{pmatrix} (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} & (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} \\ (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} & (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-ika} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem und ermitteln Sie $A$ und $B$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von $A$ und $B$ aus den Anschlussbedingungen die Koeffizienten $r$ und $t$ und sodann die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, hier $R = |r|^2$ und $T = |t|^2$. Zeigen Sie, dass Wahrscheinlichkeitserhaltung gilt, also $|R|^2 + |T|^2 = 1$ gilt. Welche Eigenschaft steht im Widerspruch zum klassischen Verhalten?

**Lösung der Aufgabe 3**

(a) Für den Fall $0 < E < V_0$ ergeben sich als stationäre Schrödingergleichungen die folgenden Beziehungen

$$|x| \geq a: \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) - E\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \propto e^{\pm ikx}$$

$$|x| < a : \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + (V_0 - E)\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) - \rho^2\varphi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \propto e^{\pm\rho x} \,.$$

Somit folgt die angegebene Form der Lösung der stationären Schrödingergleichung.

(b) Nun können die Anschlussbedingungen bei $|x| = a$ aufgestellt werden, die auf folgende Gleichungen führen

$$\begin{aligned}
&\text{Stetigkeit von } \varphi(x): && \varphi_1(-a) = \varphi_2(-a) && e^{-ika} + re^{ika} = Ae^{-\rho a} + Be^{\rho a} && (1)\\
& && \varphi_2(a) = \varphi_3(a) && Ae^{\rho a} + Be^{-\rho a} = te^{ika} && (2)\\
&\text{Stetigkeit von } \varphi'(x): && \varphi_1'(-a) = \varphi_2'(-a) && ik(e^{-ika} - re^{ika}) = \rho(Ae^{-\rho a} - Be^{\rho a}) && (3)\\
& && \varphi_2'(a) = \varphi_3'(a) && \rho(Ae^{\rho a} - Be^{-\rho a}) = ikte^{ika} \,. && (4)
\end{aligned}$$

Aus Gl. (3) und Gl. (4) folgt weiter

$$e^{-ika} - re^{ika} = \frac{\rho}{ik}(Ae^{-\rho a} - Be^{\rho a}) \tag{5}$$

$$\frac{\rho}{ik}(Ae^{\rho a} - Be^{-\rho a}) = te^{ika} \,. \tag{6}$$

Nun liefern Gl. (1) und (5) sowie Gl. (2) und (6) weiter

$$2e^{-ika} = A\left(1 - i\frac{\rho}{k}\right)e^{-\rho a} + B\left(1 + i\frac{\rho}{k}\right)e^{\rho a} \tag{7}$$

$$0 = A\left(1 + i\frac{\rho}{k}\right)e^{\rho a} + B\left(1 - i\frac{\rho}{k}\right)e^{-\rho a} \,. \tag{8}$$

Dies liefert das angegebene lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} & (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} \\ (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} & (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-ika} \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

Die Determinante der Matrix $M$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\det M &= (1 - i\frac{\rho}{k})^2 e^{-2\rho a} - (1 + i\frac{\rho}{k})^2 e^{2\rho a} = \frac{1}{k^2}\left[(\rho^2 - k^2)(e^{2\rho a} - e^{-2\rho a}) - 2i\rho k(e^{2\rho a} + e^{-2\rho a})\right]\\
&= \frac{2}{k^2}\left[(\rho^2 - k^2)\sinh(2\rho a) - 2i\rho k\cosh(2\rho a)\right] \,.
\end{aligned}$$

Die Lösung durch Cramersche Regel liefert dann

$$\det\begin{pmatrix} 2e^{-ika} & (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} \\ 0 & (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} \end{pmatrix} = 2(1 - i\frac{\rho}{k})e^{-ika}e^{-\rho a} \qquad A = \frac{2(1 - i\frac{\rho}{k})e^{-ika}e^{-\rho a}}{\det M}$$

$$\det\begin{pmatrix} (1 - i\frac{\rho}{k})e^{-\rho a} & 2e^{-ika} \\ (1 + i\frac{\rho}{k})e^{\rho a} & 0 \end{pmatrix} = -2(1 + i\frac{\rho}{k})e^{-ika}e^{\rho a} \qquad B = \frac{-2(1 + i\frac{\rho}{k})e^{-ika}e^{\rho a}}{\det M} \,.$$

(c) Unter Benutzung von Gl. (1) folgt dann für den Koeffizient

$$\begin{aligned} r &= Ae^{-\rho a}e^{-ika} + Be^{\rho a}e^{-ika} - e^{-2ika} \\ &= e^{-2ika}\frac{2(1-i\frac{\rho}{k})e^{-2\rho a} - 2(1+i\frac{\rho}{k})e^{2\rho a} - \det M}{\det M} \\ &= -\frac{e^{-2ika}}{\det M}(1-i\frac{\rho}{k})(1+i\frac{\rho}{k})(e^{-2\rho a} - e^{2\rho a}) = -\frac{e^{-2ika}}{\det M}2(1+\frac{\rho^2}{k^2})\sinh(2\rho a) \\ &= e^{-2ika}\frac{(k^2+\rho^2)\sinh(2\rho a)}{2i\rho k\cosh(2\rho a) - (\rho^2-k^2)\sinh(2\rho a)}\,. \end{aligned}$$

Aus Gl. (2) folgt entsprechend für den Koeffizient

$$\begin{aligned} t &= Ae^{\rho a}e^{-ika} + Be^{-\rho a}e^{-ika} = \frac{e^{-2ika}}{\det M}\left[2(1-i\frac{\rho}{k}) - 2(1+i\frac{\rho}{k})\right] \\ &= e^{-2ika}\frac{2i\rho k}{2i\rho k\cosh(2\rho a) - (\rho^2-k^2)\sinh(2\rho a)}\,. \end{aligned}$$

Wir können damit den Refexions- und Transmissionskoeffizienten $R = |r|^2$ und $T = |t|^2$ berechnen, die angeben welcher Teil des Wahrscheinlichkeitsstroms reflektiert und transmittiert wird. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} r &= e^{-2ika}\frac{(k^2+\rho^2)\sinh(2\rho a)(-2i\rho k\cosh(2\rho a) - (\rho^2-k^2)\sinh(2\rho a))}{(2\rho k)^2\cosh^2(2\rho a) + (\rho^2-k^2)^2\sinh^2(2\rho a)} \\ R = |r|^2 &= \frac{(k^2+\rho^2)^2\sinh^2(2\rho a)((2\rho k)^2\cosh^2(2\rho a) + (\rho^2-k^2)\sinh^2(2\rho a))}{((2\rho k)^2\cosh^2(2\rho a) + (\rho^2-k^2)^2\sinh^2(2\rho a))^2} \\ &= \frac{(k^2+\rho^2)^2\sinh^2(2\rho a)}{(2\rho k)^2\cosh^2(2\rho a) + (\rho^2-k^2)^2\sinh^2(2\rho a)} = \frac{(k^2+\rho^2)^2\sinh^2(2\rho a)}{(\rho^2+k^2)^2\sinh^2(2\rho a) + (2\rho k)^2} \end{aligned}$$

und in äquivalenter Weise

$$\begin{aligned} t &= e^{-2ika}\frac{2i\rho k(-2i\rho k\cosh(2\rho a) - (\rho^2-k^2)\sinh(2\rho a))}{(2\rho k)^2\cosh^2(2\rho a) + (\rho^2-k^2)^2\sinh^2(2\rho a)} \\ T = |t|^2 &= \frac{(2\rho k)^2}{(2\rho k)^2\cosh^2(2\rho a) + (\rho^2-k^2)^2\sinh^2(2\rho a)} \\ &= \frac{(2\rho k)^2}{(\rho^2+k^2)^2\sinh^2(2\rho a) + (2\rho k)^2}\,. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Klassik besteht also eine endliche Transmissionswahrscheinlichkeit, der Tunneleffekt durch die Potentialbarriere ist möglich. Im Falle von $V_0 \to \infty$ wird $\rho \to \infty$ und damit wird $R \to 1$ und $T \to 0$, der Tunneleffekt verschwindet. Es ist offensichtlich, dass

$$R + T = \frac{(\rho^2+k^2)^2\sinh^2(2\rho a) + (2\rho k)^2}{(\rho^2+k^2)^2\sinh^2(2\rho a) + (2\rho k)^2} = 1\,.$$

Als Zusatz sei vermerkt, dass dies Wahrscheinlichkeitserhaltung impliziert, denn $R$ und $T$ entsprechen den auf den einlaufenden Wahrscheinlichkeitsstrom normierten Wahrscheinlichkeitsströmen, die reflektiert und transmittiert werden. Es ist $R = \frac{j_{\text{refl}}}{j_{\text{ein}}}$ und $T = \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{ein}}}$ mit den Wahrscheinlichkeitsströmen

$$j(x) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\varphi^*\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\right)\varphi\right]\,.$$

Es sei auch auf die in der Saalübung gezeigte Kontinuitätsgleichung verwiesen.

(d) Diese Teilaufgabe ist ein Zusatz, der nicht Teil des Blattes war:
Betrachten Sie zuletzt den Fall eines einlaufenden Teilchens mit Energie $E > V_0$. Wie muss der Ansatz aus Teilaufgabe (a) abgeändert werden? Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizient $|T|^2$ durch eine passende Ersetzung von $\rho$ und skizzieren Sie die Abhängigkeit von der Breite der Potentialbarriere $a$.
Diesen Fall erhalten wir aus der vorherigen Diskussion, indem wir $\rho \to -ik'$ setzen. Dabei ist $k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$. Wir setzen die hyperbolischen Funktionen wie folgt fort

$$\cosh(-2ik'a) = \frac{1}{2}\left(e^{2ik'a} + e^{-2ik'a}\right) = \cos(2k'a)$$
$$\sinh(-2ik'a) = \frac{1}{2}\left(e^{-2ik'a} - e^{2ik'a}\right) = -i\sin(2k'a)\,.$$

Wir erinnern uns an

$$t = e^{-2ika}\frac{2i\rho k}{2i\rho k\cosh(2\rho a) - (\rho^2 - k^2)\sinh(2\rho a)} = e^{-2ika}\frac{2k'k}{2k'k\cos(2k'a) - i(k'^2 + k^2)\sin(2k'a)}\,.$$

Wir berechnen wieder den Transmissionskoeffizienten $T$ und erhalten

$$\begin{aligned} T = |t|^2 &= \frac{(2k'k)^2}{(2k'k)^2\cos^2(2k'a) + (k'^2+k^2)^2\sin^2(2k'a)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(2k'a) + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} + 2\right)\sin^2(2k'a)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'}\right)^2\sin^2(2k'a)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{V_0^2}{E(E-V_0)}\sin^2(2k'a)}\,. \end{aligned}$$

Der Transmissionskoeffizient oszilliert demnach mit der Länge der Potentialbarriere mit Resonanzen bei $2k'a = n\pi$.