Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Aufgabe 1: Hilbert-Raum von Funktionen **4+2 = 6 Punkte**

Betrachten Sie den von den Funktionen $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x$ aufgespannten Hilbert-Raum. Der Definitionsbereich der Funktionen sei das Intervall $[0, 2\pi]$ und das innere Produkt oder Skalarprodukt sei

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} dx \overline{f_1}(x) f_2(x) \,.$$

Hinweis: In Vorbereitung auf die Dirac-Notation schreiben wir hier bereits $\langle f_1|f_2\rangle = (f_1, f_2)$, wenngleich wir uns mit der Dirac-Notation ausgiebig erst auf dem nächsten Blatt beschäftigen.

(a) Bestimmen Sie die Dimension des Raumes, finden Sie also die linear unabhängigen Vektoren, und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis. *Hinweis:* Ein guter Ansatz ist das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.

(b) Ist die Funktion $\cos^3 x$ ein Vektor in diesem Hilbert-Raum? Begründen Sie.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Wir führen die folgenden Bezeichnungen für die Vektoren ein

$$v_0 := 1\,, \qquad v_1 := \sin x\,, \qquad v_2 := \cos x\,, \qquad v_3 := \sin 2x$$
$$v_4 := \cos 2x\,, \qquad v_5 := \sin^2 x\,, \qquad v_6 := \cos^2 x\,.$$

Der Raum $\mathcal{H} = \text{span}\{v_0, \dots, v_6\}$ wird von 7 Vektoren aufgespannt und ist somit höchstens 7-dimensional. Allerdings ist $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, also kann beispielsweise v_6 als Linearkombination von v_0 und v_5 geschrieben werden. Somit ist $\dim \mathcal{H} \leq 6$. Weiterhin ist $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ und somit v_5 eine Linearkombination von v_0 und v_4 und somit $\dim \mathcal{H} \leq 5$. Wir möchten nun eine Orthonormalbasis nach dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren konstruieren. Wir starten mit

$$b_0 = \frac{v_0}{|v_0|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Hierbei kommt die über das Skalarprodukt definierte Norm zum Einsatz $|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$. Weitere Vektoren folgen gemäß der Vorschrift

$$\tilde{b}_i := v_i - \sum_{j<i} \langle b_j | v_i \rangle\, b_j\,, \qquad b_i := \frac{\tilde{b}_i}{|\tilde{b}_i|}\,,$$

ergo jeweils durch andere Basisvektoren vorhandene “Richtungen” werden abgezogen. Um die relevanten Integrale in den Skalarprodukten auszurechnen, machen wir ein paar Vorüberlegungen. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \left\{ \begin{matrix} 2\pi & \text{für} \quad n = 0 \\ \frac{1}{in} e^{inx}\Big|_0^{2\pi} & \text{für} \quad n \neq 0 \end{matrix} \right\} = 2\pi \delta_{n,0} \,.$$

Damit erhalten wir für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (e^{imx} - e^{-imx})(e^{inx} - e^{-inx}) dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (-e^{i(m-n)x} - e^{-i(m-n)x}) dx \\ &= -\frac{1}{4} (-2\pi \delta_{m,n} - 2\pi \delta_{m,n}) = \pi \delta_{m,n} \,, \end{aligned}$$

da Terme mit $(m+n) > 0$ stets Null ergeben. Ebenso findet man

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{m,n}$$

und weiterhin

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(mx) \sin(nx)}_{\in \mathbb{R}} dx = \underbrace{\frac{1}{4i} (\text{reelle Zahl})}_{\in i\mathbb{R}} = 0 \,.$$

Tatsächlich gelten obige Resultate auch für $m = 0$ oder $n = 0$. Damit finden wir nun ohne weitere Rechnung, dass die vorgegeben Vektoren schon im Sinne des Skalarprodukts “senkrecht” aufeinander stehen. Daher ist

$$\begin{aligned} &\tilde{b}_1 = v_1 = \sin x && b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \,, && \tilde{b}_2 = v_2 = \cos x && b_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \\ &\tilde{b}_3 = v_3 = \sin 2x && b_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x \,, && \tilde{b}_4 = v_4 = \cos 2x && b_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \,. \end{aligned}$$

Somit ist auch klar, dass $\dim \mathcal{H} = 5$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} v := \cos^3 x &= \frac{1}{8} \left(e^{ix} + e^{-ix} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} \left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix} \right) = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \,. \end{aligned}$$

Damit sieht man sofort, dass $\langle b_i | v \rangle = 0$ für $i \neq 2$ und

$$\langle b_2 | v \rangle = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \pi = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \,.$$

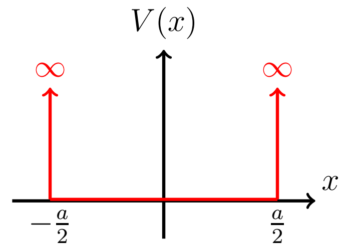
Nun ist jedoch

$$\sum_{i=0}^{4} \langle b_i | v \rangle \, b_i = \frac{3}{4} \cos x \neq v \,.$$

Somit kann v nicht als Linearkombination der Basisvektoren ausgedrückt werden. Es ist also $v \notin \mathcal{H}$.

Aufgabe 2: Entwicklung nach stationären Zuständen $\boxed{\textbf{1+2+1+1 = 5 Punkte}}$

Aus der letzten Übung ist Ihnen der Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bekannt, der in dieser Aufgabe der Einfachheit halber leicht verschoben diskutiert werden soll, beschrieben durch



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{für} \quad |x| \geq \frac{a}{2} \end{cases} .$$

Für ein sich darin befindliches Teilchen sind die Energieeigenzustände in gerade und ungerade Zustände aufteilbar, welche gegeben sind durch:

$$\varphi_n(x) = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(k_n x) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_n x) & \text{für } n \text{ gerade} \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{\pi}{a}n, \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2a^2 m}n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese Energieeigenzustände bilden wie in der vorherigen Aufgabe eine Orthonormalbasis eines unendlich-dimensionalen Hilbert-Raums. Daher kann jede beliebige Wellenfunktion einfach in diesen Energieeigenzuständen entwickelt werden gemäß

$$\varphi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \qquad \text{mit} \qquad c_n = \langle \varphi_n | \varphi \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx \overline{\varphi_n}(x)\varphi(x) .$$

Betrachten Sie ein sich zur Zeit $t = 0$ ausschließlich in der linken Hälfte des Potentials befindliches Teilchen, welches mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Ort $x < 0$ anzutreffen ist.

(a) Welche Wellenfunktion $\psi(x, t = 0) = \varphi(x)$ beschreibt diesen Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$? *Hinweis:* Normieren Sie $\psi(x, t = 0)$!

(b) Entwickeln Sie $\psi(x, t = 0)$ in den ersten vier Energieeigenzuständen, berechnen Sie also die Entwicklungskoeffzienten c_n für $n = 1, \ldots, 4$.

(c) Wenn Sie eine Energiemessung bei $t = 0$ durchführen, so misst Ihre Apparatur einen Energieeigenzustand φ_n. Sie können daher den verschiedenen möglichen Ergebnissen E_n eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, wenn Sie anfänglich den Zustand $\psi(x, t = 0)$ vorliegen haben. Wie erhalten Sie diese Wahrscheinlichkeiten aus der vorherigen Teilaufgabe?

(d) Argumentieren Sie, was für $t > 0$ passiert. Verbleibt das Teilchen in der linken Hälfte des Potentialtopfs?

Lösung der Aufgabe 2

(a) Die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ muss in der linken Hälfte des Potentialtopfes konstant sein, also $\psi(x, t = 0) = C$. Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t = 0)|^2 dx = C^2 \frac{a}{2} = 1$ liefert also:

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} & \text{für} \quad -\frac{a}{2} < x \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Die Entwicklung der Wellenfunktion in den Energieeigenzuständen liefert:

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Dabei sind die Entwicklungskoeffzienten durch $c_n = \langle \varphi_n(x) | \, \psi(x, t = 0) \rangle$ gegeben. Für diese ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \langle \varphi_1(x) | \, \psi(x, t = 0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^*(x) \psi(x, t = 0) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \frac{2}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{\pi} \\
c_2 &= \langle \varphi_2(x) | \, \psi(x, t = 0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^*(x) \psi(x, t = 0) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} dx = -\frac{2}{\pi} \\
c_3 &= \langle \varphi_3(x) | \, \psi(x, t = 0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_3^*(x) \psi(x, t = 0) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \frac{2}{a} \cos \frac{3\pi x}{a} dx = -\frac{2}{3\pi} \\
c_4 &= \langle \varphi_4(x) | \, \psi(x, t = 0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_4^*(x) \psi(x, t = 0) dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \frac{2}{a} \sin \frac{4\pi x}{a} dx = 0
\end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Energiemessung zum Zeitpunkt $t = 0$ die Energie des Grundzustands $\varphi_1(x)$, des ersten $\varphi_2(x)$, zweiten $\varphi_3(x)$ bzw. dritten $\varphi_4(x)$ angeregten Zustands liefert. Es sei darauf hingewiesen, dass höhere Entwicklungskoeffzienten von 0 verschieden sind. Die Wahrscheinlichkeiten den Energieeigenwert eines Zustands $\varphi_n(x)$ zu messen, sind durch $|c_n|^2$ gegeben und somit

$$\begin{aligned}
|c_1|^2 &= |c_2|^2 = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.4053 \\
|c_3|^2 &= \frac{4}{9\pi^2} \approx 0.0450 \\
|c_4|^2 &= 0 \,.
\end{aligned}$$

(d) Die Entwicklung in den ersten vier Eigenzuständen ist bereits Teil von Aufgabe (b), der Vollständigkeit halber stellen wir das Resultat nochmal dar

$$\psi(x, t = 0) = \frac{2}{\pi} \varphi_1(x) - \frac{2}{\pi} \varphi_2(x) - \frac{2}{3\pi} \varphi_3(x) + \ldots \,.$$

Die abseparierte Zeitabhängigkeit ist gegeben durch den Zeitentwicklungsoperator

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \psi(x, t = 0) \,.$$

Mit Hilfe der Entwicklung in Energieeigenzuständen folgt

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \sum_n c_n \varphi_n(x) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} c_n \varphi_n(x) \,.$$

Entscheidend ist, dass dies eine Superposition von stationären Zuständen mit unterschiedlichen(!) Zeitentwicklungsoperatoren ist, die sich beim Quadrieren zur Wahrscheinlichkeitsdichte nicht wegheben. Daher hat $|\psi(x, t)|^2$ eine Zeitabhängigkeit und das Wellenpaket läuft auch in die rechte Hälfte des Potentialtopfes. Das Teilchen nutzt den vollen zur Verfügung stehenden Raum für $t > 0$ aus.

Aufgabe 3: Operatorspielerei, die Erste **2+2 = 4 Punkte**

Wir möchten uns mit linearen Operatoren auf dem Hilbert-Raum näher beschäftigen. Diese bilden ein Element des Hilbert-Raums auf ein anderes Element des Hilbert-Raums ab und für diese können, wie in der linearen Algebra, Eigenzustände und Eigenwerte berechnet werden. Die beiden nachfolgenden Teilaufgaben sind kurz und linear unabhängig.

(a) Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$ in einer Variablen x mit komplexwertigen Koeffizienten. Wir definieren den Ableitungsoperator $D := \frac{d}{dx}$, welcher auf die Vektoren dieses Raumes wirkt. Definieren Sie eine (nicht normierte) Basis aus Monomen und sammeln Sie die Entwicklungskoeffizienten in Vektoren des $\mathbb{C}^{N+1}$. Finden Sie in dieser Darstellung im $\mathbb{C}^{N+1}$ eine Darstellung des Operators D als Matrix. Bestimmen Sie die Eigenwerte von D.

(b) Sei $|\psi_\lambda\rangle$ ein normierter Eigenzustand eines hermiteschen Operators A zum Eigenwert λ im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Berechnen Sie die Varianz, also die mittlere quadratische Abweichung des Operators vom Erwartungswert in diesem Eigenzustand, somit die Größe

$$\left\langle \psi_\lambda \middle| (A - \langle \psi_\lambda | A | \psi_\lambda \rangle \, \mathbb{I})^2 \middle| \psi_\lambda \right\rangle .$$

mit dem Einheitsoperator $\mathbb{I}$.
Hinweis: Hierbei ist $\langle \psi | X | \psi \rangle = \langle \psi | X \psi \rangle = \left\langle X^\dagger \psi | \psi \right\rangle$ der Erwartungswert von X im Zustand $|\psi\rangle$, definiert über das Skalarprodukt im Hilbert-Raum. Die Notation $X^\dagger$ bezeichnet den zu X adjungierten Operator. Hermitesche Operatoren erfüllen $X^\dagger = X$. Sie benötigen nur grundlegende Eigenschaften der Eigenwerttheorie und des Skalarprodukts.

Lösung der Aufgabe 3

(a) Diese Aufgabe motiviert, dass eine Darstellung eines Vektorraums/Hilbert-Raums keineswegs eindeutig sein muss. Bewusst verwenden wir unterschiedlichste Schreibweisen für Vektoren und Operatoren, da die Literatur hier auch reich ist. Wir schreiben eine Basis der Monome in der Form $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. In dieser Basis schreiben wir

$$v = \sum_{k=0}^{N} c_n x^n ,$$

so dass wir $(c_0, c_1, \dots, c_N)^T$ als Vektor im $\mathbb{C}^{N+1}$ verstehen. Die Wirkung von D ist

$$Dv = \sum_{n=0}^{N} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) c_{n+1} x^n , \quad \text{also} \quad D \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_2 \\ \vdots \\ N c_N \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Somit ist die Matrixdarstellung von D eine Matrix mit einer gefüllten Nebendiagonalen

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Es gibt nur einen Eigenwert, dieser ist Null, denn die charakteristische Gleichung ist $\det(D - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^{N+1} = 0$ mit algebraischer Vielfachheit $N+1$. Als Zusatz sei für die Mathematiker/innen vermerkt, dass die Matrix schon beinahe Jordan Normalform mit einem Jordanblock hat. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist damit nur eindimensional und durch das konstante Monom gegeben, welches nach Ableitung wieder ein konstantes Monom ergibt.

(b) Es ist laut Angabe $A\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$. Somit ist

$$\langle\psi_\lambda|A|\psi_\lambda\rangle = \langle\psi_\lambda|A\psi_\lambda\rangle = \langle\psi_\lambda|\lambda\psi_\lambda\rangle = \lambda\,\langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,,$$

da der Eigenzustand normiert sein soll. Wir können nun einfach ausrechnen, dass

$$\begin{aligned} &(A - \langle\psi_\lambda|A|\psi_\lambda\rangle\,\mathbb{I})^2\,|\psi_\lambda\rangle \\ &= \left(A^2 - 2\,\langle\psi_\lambda|A|\psi_\lambda\rangle\,A + \langle\psi_\lambda|A|\psi_\lambda\rangle^2\right)|\psi_\lambda\rangle \\ &= \left(A^2 - 2\lambda A + \lambda^2\right)|\psi_\lambda\rangle = (\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2)\,|\psi_\lambda\rangle = 0\,|\psi_\lambda\rangle\ . \end{aligned}$$

Hier ist eingeflossen, dass $A\mathbb{I} = \mathbb{I}A$, weil der Einheitsoperator nichts tut. Somit verschwindet die Varianz.

Aufgabe 4: Unschärfe und die Schwarzsche Ungleichung **4+1 = 5 Punkte**

Die Schwarzsche Ungleichung für beliebige Vektoren u und v eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ lautet

$$|\,\langle u|v\rangle\,|^2 \leq \langle u|u\rangle\,\langle v|v\rangle\ .$$

Wir können diese Ungleichung direkt übersetzen in eine allgemeine Unschärferelation. Dazu betrachten wir zwei hermitesche Operator A und B auf $\mathcal{H}$, sowie einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Wir definieren auch noch die Operatoren

$$\Delta^2 A = (A - \langle\psi|A|\psi\rangle\,\mathbb{I})^2\,, \qquad \Delta^2 B = (B - \langle\psi|B|\psi\rangle\,\mathbb{I})^2\,,$$

wobei $\mathbb{I}$ wieder den Einheitsoperator bezeichnet.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|^2 \leq 4\left\langle\psi|\Delta^2 A|\psi\right\rangle\left\langle\psi|\Delta^2 B|\psi\right\rangle\ .$$

Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung zuerst für den Fall, dass $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle = 0$. Starten Sie mit der linken Seite und benutzen Sie auch, dass $|z - z^*|^2 \leq 4|z|^2$ für $z \in \mathbb{C}$, bevor Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden.

(b) Zeigen Sie, dass die Heisenberg'sche Unschärferelation für den Ort und Impuls ein Spezialfall der Ungleichung aus (a) ist. Nutzen Sie, dass $[P,X]=\frac{\hbar}{i}\mathbb{I}$ gilt, wie wir später noch motivieren werden.

Lösung der Aufgabe 4

(a) Wie in der Aufgabenstellung vorgeschlagen, starten wir mit der Annahme, dass $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle = 0$. Damit ist $\Delta^2 A = A^2, \Delta B^2 = B^2$. Wir schätzen damit ab

$$\begin{aligned}
|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|^2 &= |\langle\psi|AB-BA|\psi\rangle|^2 \\
&= |\langle\psi|AB\psi\rangle - \langle\psi|BA\psi\rangle|^2 = |\langle A^\dagger\psi|B\psi\rangle - \langle B^\dagger\psi|A\psi\rangle|^2 \\
&= |\langle A\psi|B\psi\rangle - \langle B\psi|A\psi\rangle|^2 = |\langle A\psi|B\psi\rangle - \langle A\psi|B\psi\rangle^*|^2 \\
&\leq 4|\langle A\psi|B\psi\rangle|^2 \leq 4\langle A\psi|A\psi\rangle\langle B\psi|B\psi\rangle \\
&= 4\langle\psi|A^2|\psi\rangle\langle\psi|B^2|\psi\rangle = 4\langle\psi|\Delta^2 A|\psi\rangle\langle\psi|\Delta^2 B|\psi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass A und B hermitesche Operatoren sind. Außerdem wurden bei den beiden Ungleichungen der Hinweis und die Schwarzsche Ungleichung genutzt. Wir definieren nun

$$\tilde{A} = A - \langle\psi|A|\psi\rangle\,\mathbb{I}\,, \qquad \tilde{B} = B - \langle\psi|B|\psi\rangle\,\mathbb{I}\,.$$

Offensichtlich ist dann $\left\langle\psi|\tilde{A}|\psi\right\rangle = \left\langle\psi|\tilde{B}|\psi\right\rangle = 0$ und wir können obiges Ergebnis anwenden. Es folgt

$$\left|\left\langle\psi|[\tilde{A},\tilde{B}]|\psi\right\rangle\right|^2 \leq 4\left\langle\psi|\tilde{A}^2|\psi\right\rangle\left\langle\psi|\tilde{B}^2|\psi\right\rangle\,.$$

Wir stellen weiterhin fest, dass $[\tilde{A},\tilde{B}]=[A,B]$ und $\tilde{A}^2=\Delta^2 A$ und $\tilde{B}^2=\Delta^2 B$ und haben somit schon die allgemeine Variante einer Unschärferelation für zwei nicht-kommutierende hermitesche Operatoren gezeigt.

(b) Für $A=P$ und $B=X$ folgt $[P,X]=\frac{\hbar}{i}\mathbb{I}$. Weiterhin sind die Unschärfen in Ort und Impuls gegeben durch

$$\Delta P := \sqrt{\langle\psi|\Delta^2 P|\psi\rangle}\,, \quad \Delta X := \sqrt{\langle\psi|\Delta^2 X|\psi\rangle}\,.$$

Damit folgt unmittelbar $\Delta X\Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$.
Wir möchten kurz den Kommutator zwischen Ort und Impuls berechnen, wenngleich der Impulsoperator nur im Ansatz motiviert wurde. Im Ortsraum ist der Ortsoperator $X=x$ und der Impulsoperator $P=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
[P,X]\psi(x,t) &= \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t) \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x,t) + x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = \frac{\hbar}{i}\psi(x,t)
\end{aligned}$$