Sommersemester 2020 - Blatt 5
Moderne Theoretische Physik I

Prof. Dr. M. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: 18.05.20
Abgabe: 25.05.20
Besprechung: 27.05.20

Gesamtpunktzahl: **20 Punkte**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu)

Anmeldung zur Vorleistung 1

Die Anmeldung zur "Vorleistung 1" (Prüfungsnummer 7800064, Teilleistung T-PHYS-102317) auf Campus ist ab sofort möglich und bleibt bis zum 19. Juni 2020 geöffnet. Sie bestehen die "Vorleistung 1" durch die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen der Modernen Theoretischen Physik I, Theorie D, definiert durch die auf Blatt 1 dargelegten Kriterien.

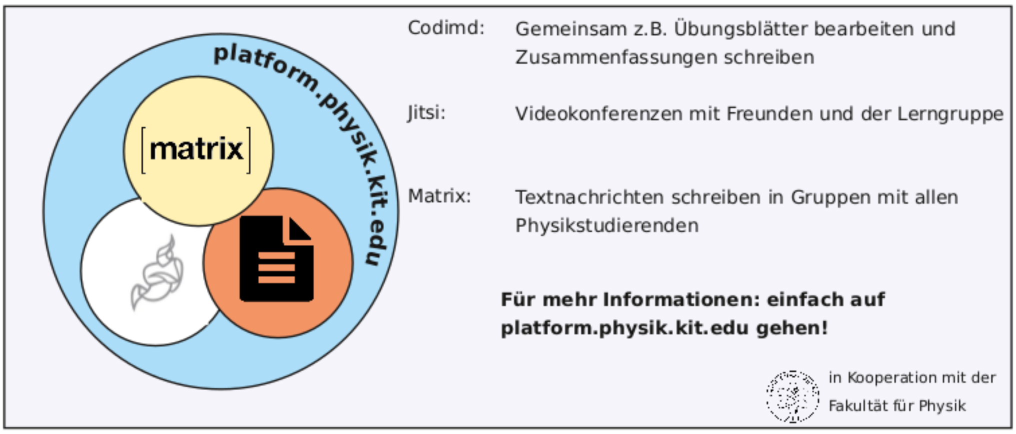
Die unbenoteten Übungsklausuren laufen in der Theorie D als "Vorleistung 2" (Prüfungsnummer 7800065 und 7800066, Teilleistung T-PHYS-102320). Sie müssen eine der Übungsklausuren bestehen, um die Vorleistung 2 zu erwerben. Die Anmeldung zur ersten Klausur mit Prüfungsnummer 7800065 erfolgt zu einem späteren Zeitpunkt, wenn klar ist, in welcher Form die Klausuren erfolgen sollen und dürfen.

Für Physiker/innen gilt: Um die benotete mündliche Prüfung über die Moderne Theoretische Physik, Theorie D-F, abzulegen, benötigen Sie beide Vorleistungen 1 und 2 der Theorie D und weitere Vorleistungen nachfolgender Veranstaltungen, siehe Modulhandbuch.
Für Mathematiker/innen gilt: Sie können durch Erwerb der Vorleistung 2 in eine benotete mündliche Prüfung über die Moderne Theoretische Physik I, Theorie D, gehen.
Für Meteorologen/innen im Master gilt: Sie können durch Erwerb der Vorleistung 1 in eine benotete mündliche Prüfung über die Moderne Theoretische Physik I, Theorie D, gehen.

Wer sich unter obigen Fällen nicht wiederfindet, darf sich gerne einmal melden. Auch sollten sich Studierende melden, deren Studiengang nicht über Campus läuft, um abzuwägen, ob unsererseits auf Qispos entsprechende Veranstaltungen anzulegen sind.

Digitale Angebote der Fachschaft

Um Ihre Kommunikation untereinander zu fördern, hat sich Ihre Fachschaft ins Zeug gelegt und für Sie verschiedene Kanäle aufgesetzt. Wir empfehlen Ihnen dringend, sich mit anderen Studierenden digital zu unterhalten. Einfach mal versuchen:



Aufgabe 1: Operatorspielerei, die Zweite **2+2 = 4 Punkte**

Wir möchten in dieser Aufgabe vertrauter mit der Bra-Ket oder auch Dirac-Notation von Zuständen im Hilbert-Raum werden. Beachten Sie, dass die zwei Teilaufgaben linear unabhängig sind und die Rechnungen kurz sind.

(a) In einem komplexen Hilbert-Raum sei durch $T := |u\rangle \langle u|$ mit $|u\rangle \neq 0$ ein linearer Operator definiert. Wann ist T hermitesch? Welche Eigenschaft muss $|u\rangle$ haben, damit T ein Projektionsoperator ist?
Hinweis: Der zu T adjungierte Operator $T^\dagger$ ist definiert durch $(\langle\psi| T |\phi\rangle)^* = \langle\phi| T^\dagger |\psi\rangle$. Hermitizität bedeutet $T^\dagger = T$. T ist ein Projektionsoperator, wenn es sich um einen hermiteschen Operator mit der zusätzlichen Eigenschaft $T^2 = T$ handelt.

(b) In einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ sei ein linearer Operator A durch $A|1\rangle = -|2\rangle$ und $A|2\rangle = |1\rangle$ definiert. Schreiben Sie A als Linearkombination von Ket-Bra-Ausdrücken. Ist A Normaloperator? Ist A hermitesch? Ist A unitär? Existiert A^{-1}? *Hinweis:* Ein Operator, welcher mit seinem Adjungierten vertauscht, heißt Normaloperator.

Aufgabe 2: Spur eines linearen Operators **1+1+1+1+1+1 = 6 Punkte**

Gegeben sei ein komplexer Hilbertraum mit einem hermiteschen Operator H, dessen Eigenzustände $|n\rangle$ zu den Eigenwerten E_n eine diskrete Orthonormalbasis aufspannen. Der Operator $U(m, n)$ sei definiert durch

$$U(m,n) = |m\rangle \langle n| \quad .$$

(a) Berechnen Sie den zu $U(m, n)$ adjungierten Operator $U^\dagger(m, n)$.

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[H, U(m, n)]$.

(c) Beweisen Sie die Relation $U(m, n)U^\dagger(p, q) = \delta_{nq}U(m, p)$.

(d) Berechnen Sie die Spur des Operator $U(m, n)$ definiert durch

$$\mathrm{Spur}(U(m,n)) := \sum_i \langle i|U(m,n)|i\rangle \quad .$$

(e) Sei A ein Operator, welcher in der angegebenen Orthonormalbasis des Operators H durch die Matrixelemente $A_{mn} = \langle m|A|n\rangle$ beschrieben wird. Beweisen Sie

$$A = \sum_{m,n} A_{mn} U(m,n) \quad .$$

(f) Zeigen Sie, dass $A_{mn} = \mathrm{Spur}(AU^\dagger(m, n))$ gilt.

Aufgabe 3: Funktionen von Operatoren **3+2 = 5 Punkte**

Betrachten Sie den Operator/die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus dem Hilbert-Raum $\mathbb{C}^2$.

(a) Bestimmen Sie zuerst die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A. Bestimmen Sie danach den Operator e^A, indem Sie die Matrix A in eine Basis aus Eigenvektoren transformieren, also auf Diagonalform bringen. Wenden Sie sodann die Exponentialfunktion auf die Diagonalelemente an und transformieren Sie die resultierende Matrix zurück. *Hinweis:* Die Transformationsmatrix beinhaltet die normierten Eigenvektoren. Diese Teilaufgabe dient auch der Wiederholung der linearen Algebra, da auch die Vorlesung zeitnah die Konstruktion von Eigenräumen linearer Operatoren behandelt.

(b) Wir setzen

$$B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \,.$$

Berechnen Sie B und vergleichen Sie mit Teilaufgabe (a).

Aufgabe 4: Baker-Hausdorff-Formel **5 Punkte**

Beweisen Sie die Baker-Hausdorff-Formel

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n$$

mit den linearen Operatoren A und B sowie den Operatoren $C_0 = B$ und $C_n = [A, C_{n-1}]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei e^A gemäß der vorherigen Aufgabe definiert ist, also

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \,.$$

Hinweis: Entwickeln Sie den Operator $F(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ in eine Taylorreihe nach Potenzen des Parameters λ und setzen Sie am Ende $\lambda = 1$.

Aufgabe 5: Mathematischer Hintergrund, again and again **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

(a) Im Zusammenhang mit kontinuierlichen Basen tritt die δ-Distribution vermehrt auf. Wiederholen Sie die Grundeigenschaften der δ-Distribution, und zeigen Sie verschiedene Beispiele für konkrete Darstellungen der Distribution.

(b) Besorgen Sie sich den Artikel "P. A. M. Dirac (1939). A new notation for quantum mechanics. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 35, pp 416-418.", der in für 1939 sehr klarer Sprache auf drei Seiten die später nach ihm benannte Dirac-Notation einführt. Stellen Sie den Artikel vor, insbesondere den dort aufgezeigten Zusammenhang zwischen den Wellenfunktionen und dem Skalarprodukt im Funktionenraum auf der einen Seite und der neuen Notation auf der anderen Seite. *Hinweis:* Sie erhalten den Artikel z.B. über den KIT-Katalog Plus der KIT Bibliothek.