Verschiebung der Abgabe wegen Pfingstmontag
Die Abgabe Ihrer Lösungen ist digital einzureichen bis Dienstag, 02.06.20, um 11:00 Uhr.

Aufgabe 1: Kontinuierliche Basis für δ-förmiges Potential — 3+2+3 = 8 Punkte

Wir betrachten ein Potential der Form $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

(a) Für $E < 0$ existiert ein gebundener Zustand. Zeigen Sie, dass dieser gegeben ist durch

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\rho}e^{-\rho|x|} \qquad \text{mit} \qquad \rho = \frac{mV_0}{\hbar^2}\,.$$

Neben der Stetigkeit von $\varphi(x)$ benötigen Sie hier als weitere für δ-Distributionen charakteristische Anschlussbedingung den endlichen Sprung in der Ableitung $\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) = -\frac{2mV_0\varphi(0)}{\hbar^2}$. Motivieren Sie diese durch Integration der Schrödingergleichung über $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx$ mit anschließendem Grenzübergang $\epsilon \to 0$. Es ist $0^\pm = 0 \pm \epsilon$.

(b) Für Streuzustände mit $E > 0$ benötigen wir noch von links und von rechts einlaufende Wellen, $\varphi_p^l(x)$ und $\varphi_p^r(x)$. Diese folgen gemäß der Ihnen bekannten Berechnung von Transmission und Reflexion und seien in dieser Aufgabe vorgegeben durch

$$\varphi_p^l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \begin{cases} e^{ipx/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa}e^{-ipx/\hbar} & \text{für} \quad x \le 0 \\ \frac{i\kappa}{1+i\kappa}e^{ipx/\hbar} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

mit $p = \sqrt{2mE}$ und $\kappa = \frac{p}{\rho\hbar}$. Bestimmen Sie $\varphi_p^r(x)$ aus $\varphi_p^l(x)$ durch Symmetrieüberlegungen. Tatsächlich bilden der gebundene und die Streuzustände ein kontinuierliches Orthonormalsystem. Zeigen Sie die Relationen

$$\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1\,, \qquad \langle\varphi_0|\varphi_p^l\rangle = 0\,.$$

Das Skalarprodukt im Funktionenraum ist gegeben durch $\langle f_1|f_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_1^*(x)f_2(x)$. *Hinweis:* Nutzen Sie $\int_0^\infty dx e^{ikx} = \frac{i}{k} + \pi\delta(k)$. Es gilt auch $\langle\varphi_0|\varphi_p^r\rangle = 0$, $\langle\varphi_p^l|\varphi_{p'}^l\rangle = \delta(p-p')$, $\langle\varphi_p^r|\varphi_{p'}^r\rangle = \delta(p-p')$ und $\langle\varphi_p^l|\varphi_{p'}^r\rangle = 0$, aber diese Rechnungen seien uns erspart.

(c) Zeigen Sie für den Fall $x > 0$ und $x' > 0$, dass das System vollständig ist, also dass

$$\varphi_0(x)\varphi_0(x') + \int_0^\infty dp\varphi_p^{l*}(x)\varphi_p^l(x') + \int_0^\infty dp\varphi_p^{r*}(x)\varphi_p^r(x') = \delta(x-x')\,.$$

Hinweis: Nützliche Integrale sind $\int_0^\infty dx\frac{\cos(ax)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$ und $\int_0^\infty dx\frac{x\sin(bx)}{1+x^2} = \text{sign}(b)\frac{\pi}{2}e^{-|b|}$.

Aufgabe 2: Basistransformationen — 1+1+2 = 4 Punkte

In einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit normierten Basisvektoren $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sei ein hermitescher Operator M definiert durch $M|+\rangle = |+\rangle$, $M|-\rangle = -|-\rangle$, $\langle+|-\rangle = 0$.

(a) Wie lautet M in der Basis $|+\rangle, |-\rangle$?

(b) Wir definieren $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i\,|-\rangle)$ und $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - i\,|-\rangle)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $M = +1, M = -1$ jeweils in den beiden Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$? *Hinweis:* Offenbar sind die betragsquadrierten Entwicklungskoeffizienten in der Eigenbasis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ zu berechnen.

(c) Zeigen Sie explizit, dass $|1\rangle$ und $|2\rangle$ orthonormal sind. Bestimmen Sie die unitäre Transformationsmatrix U, die $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ in $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ überführt. In welche Matrix N wird M durch U transformiert?

Aufgabe 3: Eigenvektoren und Eigenwerte eines Operators **2+2 = 4 Punkte**

Die Vektoren $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ seien eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raums. Gegeben sei der Operator

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dargestellt in der Basis} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle\ .$$

(a) Ist σ_y hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren $|x_i\rangle$ bezüglich der angegebenen Basis.

(b) Prüfen Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenvektoren in der Darstellung der Orthonormalbasis. Drücken Sie den Projektionsoperator $P = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i|$ durch die Orthonormalbasis aus und wenden Sie diesen auf die Eigenvektoren $|x_i\rangle$ an.

Aufgabe 4: Operatorspielerei, die Dritte **2+2 = 4 Punkte**

Die zwei Teilaufgaben sind linear unabhängig.

(a) Zeigen Sie: Besitzt ein linearer Operator A die Eigenschaft $AA^\dagger = A^\dagger A$ und ist $|a\rangle$ mit $\langle a|a\rangle = 1$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a, so ist $|a\rangle$ auch Eigenvektor von $A^\dagger$ zum Eigenwert a^*. *Hinweis:* Ein Operator, welcher mit seinem Adjungierten vertauscht, heißt Normaloperator und besitzt stets ein vollständiges System orthogonaler Eigenvektoren.

(b) Gegeben sei der Operator $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie mit Hilfe der bekannten Reihenentwicklung, dass $\exp(i\alpha\sigma_x) = \mathbb{I}\cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha$ mit dem Einheitsoperator $\mathbb{I}$.

Aufgabe 5: Virialsatz und Hermite-Polynome **Präsenzaufgabe**

Diese Aufgabe ist nicht schriftlich einzureichen. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig zu bearbeiten und je eine 10-15 minütige Präsentation wert.

(a) Stellen Sie den Virialsatz aus der Mechanik vor, der eine Aussage zur zeitlich mittleren kinetischen Energie und potentiellen Energie eines abgeschlossenen physikalischen Systems macht. Zeigen Sie auch ein Beispiel auf. *Hinweis:* Wir diskutieren später die quantenmechanische Variante des Satzes.

(b) In der Behandlung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik treten Hermite-Polynome auf. Stellen Sie die Polynome vor. Legen Sie insbesondere auch Wert auf die Orthogonalität und die Vollständigkeit derselben.